

1

Ueber die

Canalisation der Electrizität

in der

electrischen Beleuchtung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

vorgelegt der

hohen philosophischen Facultät

der

UNIVERSITÄT ZÜRICH

von

Robert Flatt

von Thalweil (Kanton Zürich).

Begutachtet von den Herren:

Professor Dr. *A. Kleiner*,

Professor Dr. *A. Meyer*.

ZÜRICH.

Druck von Zürcher und Furrer.

1889.

79

Ueber die
Canalisation der Electrizität
in der
electrischen Beleuchtung.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der philosophischen Doctorwürde
vorgelegt der
hohen philosophischen Facultät
der
UNIVERSITÄT ZÜRICH
von

Robert Flatt
von Thalweil (Kanton Zürich).

Begutachtet von den Herren:
Professor Dr. *A. Kleiner*,
Professor Dr. *A. Meyer*.

ZÜRICH.
Druck von Zürcher und Furrer.
1889.

Meinem verehrten Lehrer

Herrn Prof. Dr. H. F. Weber

aus Dankbarkeit und Hochachtung

gewidmet.

Die ersten Probleme electrischer Stromverzweigung hat Ohm ¹⁾ im Jahre 1827 behandelt. Einige weitere Aufgaben über Verzweigung des electrischen Stromes sind von Poggendorf ²⁾ und Lenz ³⁾ gelöst worden. Die beiden fundamentalen Sätze über Stromverzweigung in linearen Leitern hat Kirchhoff ⁴⁾ gefunden. Ferner hat er die Bestimmung der Stromstärken aus den gegebenen Widerständen und electromotorischen Kräften für ein beliebiges System linearer Leiter entwickelt und dadurch das Problem der electrischen Stromverzweigung für lineare Leiter in der allgemeinsten Form gelöst. Das Spezialisiren dieses allgemeinsten Resultates ist für die meisten praktischen Anwendungen zu umständlich. In Folge dessen findet diese allgemeinste Lösung bei der Berechnung grösserer Verzweigungssysteme keine Verwendung.

Seit dem Anfange der siebziger Jahre hat durch die Einführung der electrischen Beleuchtung die Stromver-

¹⁾ Ohm, Die galvanische Kette.

²⁾ Pogg. Ann. Bd. LIV, LV.

³⁾ Lenz, Bulletin phys. math. de l'Acad. de St. Pétersbourg. I, III.

⁴⁾ Pogg. Ann. LXIV, LXXV.

zweigung eine erhöhte Wichtigkeit in der Electrotechnik erlangt. Die Fragen nach den günstigsten Verzweigungssystemen und der besten Materialvertheilung sind namentlich in den letzten Jahren der Gegenstand häufiger Diskussionen geworden, ohne jedoch durch eine umfassende Berechnung und Vergleichung der möglichen Verzweigungsarten ihren Abschluss zu finden. Die vorliegende Arbeit bezweckt eine Vergleichung der verschiedenen Methoden der Stromverzweigung und der Materialvertheilung hinsichtlich der Arbeit und der electromotorischen Kraft, die zum Betriebe eines electrischen Beleuchtungsnetzes erforderlich sind.

I. Stromverzweigung bei constantem Querschnitt der Hauptleitungen.

Die einfachste Anlage eines electrischen Beleuchtungssystems bildet die Einschaltung der nöthigen Lampen in einen einzigen geschlossenen Kreis. Abgesehen von den andern Mängeln dieses Systems, ist dasselbe für grössere Anlagen nicht wohl anwendbar wegen der hohen electromotorischen Kraft, welche es verlangt. Wir lassen daher im Folgenden diesen einfachsten Fall unberücksichtigt und betrachten die Parallelschaltung in möglichster Allgemeinheit.

Es seien $2k + 2$ gleiche parallele Leitungen gegeben. Zwischen je zwei neben einander liegenden mögen in gleichen Abständen n identische Lampen eingeschaltet werden, so dass $2k + 1$ Systeme von je n parallel geschalteten Lampen entstehen (s. Fig. 1 für $k = 2$, $n = 7$, d. h. für 5 Systeme zu 7 Lampen). In jedem dieser $2k + 1$ Systeme sei die electromotorische Kraft einer Dynamomaschine thätig. Die electromotorischen Kräfte $E_1, E_2, \dots E_{2k+1}$ aller Maschinen sollen als gleichgerichtet

angenommen werden. Den Lampenwiderstand bezeichnen wir mit w , die Widerstände der $2k + 1$ Dynamomaschinen mit $W_0^{(1)}, W_0^{(2)}, \dots W_0^{(2k+1)}$, den Widerstand zwischen zwei auf

oder

$$W_{n-1}^{(1)} = W_n^{(1)} + W$$

$$W_{n-2}^{(1)} = W_n^{(1)} + W + 3W$$

$$W_{n-3}^{(1)} = W_n^{(1)} + W + 3W + 5W$$

• • • • •

$$W_2^{(1)} = W_n^{(1)} + W + 3W + 5W + \dots + (2n-5) \cdot W$$

$$W_1^{(1)} = W_n^{(1)} + W + 3W + 5W + \dots + (2n-5) \cdot W + (2n-3)W$$

b) Die innern Systeme von gerader Ordnung liefern die Gleichungen:

$$E_{2\lambda} = n i W_o^{(2\lambda)} + i W^{(2\lambda)} + i \cdot W_1^{(2\lambda)} + i \cdot W, \quad \lambda = 1, 2, \dots k.$$

$$0 = W^{(2\lambda)} + W_2^{(2\lambda)} + W^{(2\lambda)} - W_1^{(2\lambda)}$$

$$0 = W^{(2\lambda)} + W_3^{(2\lambda)} + W^{(2\lambda)} - W_2^{(2\lambda)}$$

• • • • •

$$0 = W^{(2\lambda)} + W_{n-1}^{(2\lambda)} + W^{(2\lambda)} - W_{n-2}^{(2\lambda)}$$

$$0 = W^{(2\lambda)} + W_n^{(2\lambda)} + W^{(2\lambda)} - W_{n-1}^{(2\lambda)}$$

In anderer Form lauten dieselben:

$$W_{n-1}^{(2\lambda)} = W_n^{(2\lambda)} + 2W$$

$$W_{n-2}^{(2\lambda)} = W_n^{(2\lambda)} + 2W + 2W = W_n^{(2\lambda)} + 2 \cdot 2W$$

$$W_{n-3}^{(2\lambda)} = W_n^{(2\lambda)} + 3 \cdot 2W$$

• • • • •

$$W_2^{(2\lambda)} = W_n^{(2\lambda)} + (n-2) \cdot 2W$$

$$\begin{aligned} W_1^{(2\lambda)} &= W_n^{(2\lambda)} + (n-1) \cdot 2W \\ E_{2\lambda} &= n i W_o^{(2\lambda)} + i W_n^{(2\lambda)} + 2 n i \cdot W. \end{aligned}$$

c) Die innern Systeme ungerader Ordnung führen zu folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} E_{2\lambda+1} &= n i W_o^{(2\lambda+1)} + i W_1^{(2\lambda+1)}, & \lambda = 1, 2, \dots k-1 \\ 0 &= W + W_1^{(2\lambda+1)} + W - W_2^{(2\lambda+1)} \\ 0 &= W + W_2^{(2\lambda+1)} + W - W_3^{(2\lambda+1)} \\ . & \\ 0 &= W + W_{n-2}^{(2\lambda+1)} + W - W_{n-1}^{(2\lambda+1)} \\ 0 &= W + W_{n-1}^{(2\lambda+1)} + W - W_n^{(2\lambda+1)} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} W_{n-1}^{(2\lambda+1)} &= W_n^{(2\lambda+1)} - 2W \\ W_{n-2}^{(2\lambda+1)} &= W_n^{(2\lambda+1)} - 2W - 2W = W_n^{(2\lambda+1)} - 2 \cdot 2W \\ W_{n-3}^{(2\lambda+1)} &= W_n^{(2\lambda+1)} - 3 \cdot 2W \\ . & . . . , ... \\ W_2^{(2\lambda+1)} &= W_n^{(2\lambda+1)} - (n-2) \cdot 2W \\ W_1^{(2\lambda+1)} &= W_n^{(2\lambda+1)} - (n-1) \cdot 2W \\ E_{2\lambda+1} &= n i W_o^{(2\lambda+1)} + i W_n^{(2\lambda+1)} - i (n-1) \cdot 2W. \end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungssystemen lassen sich als erste Resultate ablesen:

1. Die Widerstände $W_v^{(\lambda)}$ der Nebenleitungen der beiden äussern Systeme nehmen in arithmetischer Pro-

gression zweiter Ordnung mit der Entfernung vom freien Ende zu. Bei den innern Systemen gerader Ordnung bilden die Widerstände $W_{\nu}^{(\lambda)}$ der Nebenleitungen, wenn wir sie ebenfalls vom freien Ende zählen, eine steigende, in den Systemen ungerader Ordnung dagegen eine fallende Progression erster Ordnung mit der Differenz $2W$.

2. Die electromotorischen Kräfte in den beiden äussersten Systemen sind quadratische, in den innern Systemen dagegen lineare Functionen der Lampenanzahl n der einzelnen Systeme.

Der minimale Widerstand einer Nebenleitung ist gleich dem Lampenwiderstand (wenn man von dem verhältnissmässig kleinen Widerstand der erforderlichen Zuleitung absieht). Bei den innern Systemen gerader Ordnung und den beiden äussern Systemen hat die Nebenleitung am freien Ende (W_n), bei den innern Systemen ungerader Ordnung dagegen die der Dynamomaschine am nächsten liegende Nebenleitung (W_1) den kleinsten Widerstand. Um die Widerstände und damit die zum Betriebe erforderliche Arbeit möglichst klein zu machen, haben wir somit in den innern Systemen gerader Ordnung sowie in den beiden äussern Systemen den Widerstand der letzten Nebenleitung $W_n^{(2\lambda)}$ und $W_n^{(1)}$, in den innern Systemen ungerader Ordnung dagegen den Widerstand der ersten Nebenleitung $W_1^{(2\lambda+1)}$ gleich dem Lampenwiderstand ω anzunehmen. Zur Vereinfachung setzen wir im Fernern die Widerstände aller Dynamomaschinen als gleich voraus und bezeichnen ihren gemeinsamen Werth mit W_o . Die electromotorischen Kräfte können unter diesen Annahmen leicht so bestimmt werden,

dass die in Fig. 1 angegebene Stromverzweigung eintritt. Wir erhalten durch Einführung dieser Voraussetzungen für die Summe der Widerstände in den Nebenleitungen und für die erforderlichen electromotorischen Kräfte die nachstehenden Relationen.

a) Die beiden äussern Systeme liefern:

$$\sum_{v=1}^{v=n} W_v^{(1)} = n \cdot \omega + \frac{n(n-1) \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \quad \text{und}$$

$$\frac{E_1}{i} = \omega + n W_o + (n-1)^2 \cdot W$$

b) Für die innern Systeme gerader Ordnung wird

$$\sum_{v=1}^{v=n} W_v^{(2\lambda)} = n \cdot \omega + n \cdot (n-1) \cdot W \quad \text{und}$$

$$\frac{E_{2\lambda}}{i} = \omega + n W_o + 2n \cdot W$$

c) Die innern Systeme ungerader Ordnung führen zu den Beziehungen:

$$W_1^{(2\lambda+1)} = \omega$$

$$W_2^{(2\lambda+1)} = \omega + 2W$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$W_n^{(2\lambda+1)} = \omega + (n-1) \cdot 2W$$

$$\sum_{v=1}^{v=n} W_v^{(2\lambda+1)} = n \omega + n(n-1) \cdot W \quad \text{und}$$

$$\frac{E_{2\lambda+1}}{i} = \omega + n W_o$$

Um die in dem ganzen Netz verbrauchte Arbeit zu finden, haben wir auf die einzelnen Theile desselben das Joule'sche Gesetz anzuwenden. Die Arbeit, welche in einem linearen Leiter verbraucht wird, um in demselben

während der Zeit z einen electrischen Strom von der Intensität i zu unterhalten, ist proportional dem Quadrat der Stromstärke, proportional seinem Widerstand W und der Zeit z . Werden diese Grössen in absolutem Masse gemessen, so ist der Ausdruck dieser Arbeit:

$$A = i^2 \cdot W \cdot z.$$

Die Summe $\sum_{\nu=1}^{(\lambda)} W_{\nu}$ aller Nebenleitungswiderstände des ganzen Netzes stellt die Arbeit dar, welche in allen Nebenleitungen verbraucht wird, wenn in denselben während der Zeiteinheit die Stromstärke eins unterhalten wird.

Bei $2k+1$ neben einander liegenden Systemen ergeben die beiden äussern, die k innern Systeme gerader und die $k-1$ innern Systeme ungerader Ordnung folgende Summe von Widerständen für alle Nebenleitungen:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2k+1}, \nu=1^{\nu=n} W_{\nu}^{(\lambda)} &= 2n\omega + 2 \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W + \\ &+ k \cdot n\omega + k \cdot n(n-1) \cdot W + \\ &+ (k-1) \cdot n \cdot \omega + (k-1) \cdot n(n-1) \cdot W \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2k+1}, \nu=1^{\nu=n} W_{\nu}^{(\lambda)} &= (2k+1) \cdot n \cdot \omega + 2k \cdot n(n-1) \cdot W + \frac{2}{3} n(n-1)(n-2) \cdot W \quad 1. \end{aligned}$$

Die totale Arbeit, welche durch die Dynamomaschinen in das ganze Netz zu führen ist, damit in allen Lampen die Stromstärke eins unterhalten wird, beträgt pro Zeiteinheit:

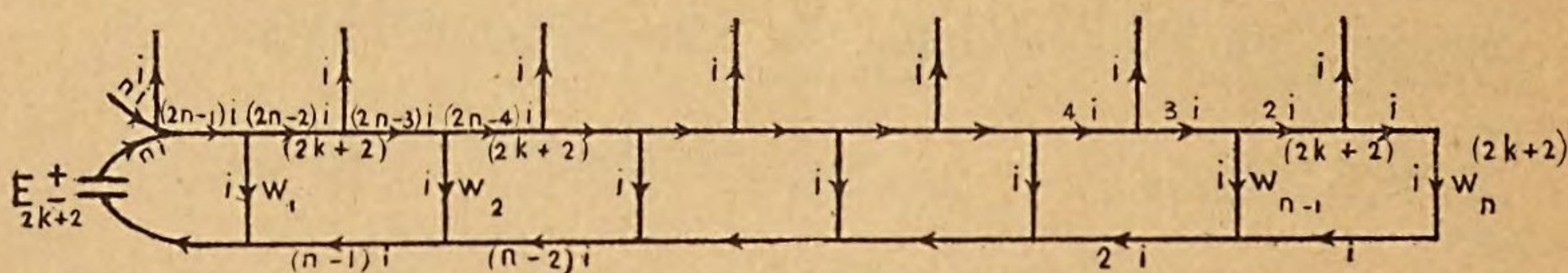
$$\begin{aligned} \frac{A}{i^2} &= (2k+1) \cdot n\omega + 2k \cdot n(n-1) \cdot W + \frac{2}{3} n(n-1)(n-2) \cdot W + \\ &+ (2k+1) \cdot n^2 \cdot W_0 + 2k \cdot n \cdot W + 2[1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2] \cdot 2W \\ \frac{A}{i^2} &= (2k+1) \cdot n \cdot \omega + (2k+1) n^2 \cdot W_0 + 2k \cdot n^2 W + 2n(n-1)^2 \cdot W \quad 2. \end{aligned}$$

Die totale electromotorische Kraft, welche zur Erzeugung dieser Stromstärke erforderlich ist, hat den Werth:

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2k+1} E_{\lambda}}{i} = (2k+1) \cdot \omega + (2k+1) \cdot n \cdot W_0 + 2knW + 2(n-1)^2 \cdot W \quad 3.$$

Ganz analoge Ausdrücke ergeben sich, wenn die Anzahl der Systeme eine gerade ist. Wird zu den $2k+1$ Systemen ein weiteres hinzugefügt, so bleiben zunächst für das erste äussere System und die k innern Systeme gerader Ordnung die entwickelten Relationen dieselben. Die Anzahl der innern Systeme ungerader Ordnung erhöht sich von $k-1$ auf k . Für das letzte äussere System (s. Fig. 2) erhält man:

Fig. 2.



$$\begin{aligned} E_{2k+2} &= n i W_0 + i W + i W_1^{(2k+2)} \\ 0 &= W + W_2^{(2k+2)} + (n-1) \cdot 2W - W_1^{(2k+2)} \\ 0 &= W + W_3^{(2k+2)} + (n-2) \cdot 2W - W_2^{(2k+2)} \\ &\dots \dots \dots \\ 0 &= W + W_{n-1}^{(2k+2)} + 2 \cdot 2W - W_{n-2}^{(2k+2)} \\ 0 &= W + W_n^{(2k+2)} + 1 \cdot 2W - W_{n-1}^{(2k+2)} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} W_n^{(2k+2)} &= \omega \\ W_{n-1}^{(2k+2)} &= \omega + 3W \end{aligned}$$

$$W_{n-2}^{(2k+2)} = \omega + 3W + 5W$$

.

$$W_1 = \omega + 3W + 5W + \dots + (2n-3) \cdot W + (2n-1) \cdot W$$

Daraus folgt;

$$\sum_{v=1}^{v=n} W_v^{(2k+2)} = n \omega + \frac{n(n-1)(2n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W$$

$$\frac{E_{2k+2}}{i} = \omega + n W_o + n^2 \cdot W$$

Die Summe der Widerstände der Nebenleitungen des ganzen Netzes wird somit bei gerader Anzahl $(2k+2)$ aller Systeme dargestellt durch den Ausdruck:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2k+2, v=n} W_v^{(\lambda)} = (2k+2) \cdot n \omega + 2k \cdot n(n-1) \cdot W + \frac{2}{3} n(n-1)(n+1) \cdot W \quad 4.$$

Für die totale Arbeit ergibt sich in diesem Falle die Gleichung:

$$\frac{A}{i^2} = (2k+2) \cdot n \omega + (2k+2) n^2 \cdot W_o + (2n^2 + 2kn - 2n + 1) \cdot n W \quad 5.$$

und für die nöthige electromotorische Kraft:

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda k=2+2} E_{\lambda}}{i} = (2k+2) \cdot \omega + (2k+2) \cdot n W_o + (2n^2 + 2kn - 2n + 1) \cdot W. \quad 6.$$

Die Formeln 1. und 4., 2. und 5., 3. und 6. für ungerade und gerade Anzahl der Systeme lassen sich unter folgende gemeinsame Form bringen:

$$\sum_{\lambda=1, v=1}^{\lambda=\mu, v=n} W_v^{(\lambda)} = \mu \cdot n \cdot \omega + \frac{n(n-1)(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2W + \mu' \cdot n(n-1) \cdot W \quad \text{I}$$

$$\frac{A}{i^2} = \mu \cdot n \cdot \omega + \mu \cdot n^2 \cdot W_o + (2n^2 - 3n + \mu' n + \alpha) \cdot n W \quad \text{II}$$

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} E_v}{i} = \mu \cdot \omega + \mu \cdot n \cdot W_o = (2n^2 - 3n + \mu' \cdot n + \alpha) \cdot W \quad \text{III}$$

Dabei bedeutet μ die Anzahl der Systeme, μ' die nächst kleinere ungerade Zahl und α die Zahl 2 oder 1, je nachdem μ ungerade oder gerade ist.

Geht man von einer ungeraden Anzahl von Systemen über zu der um eins grösseren geraden Anzahl, so wird ein System hinzugefügt, dessen Nebenleitungen den Widerstand um $n\omega + n(n-1) \cdot W$ vermehren. Ferner geht das letzte äussere System ungerader Ordnung in ein solches von gerader Ordnung über, dessen Nebenleitungen statt $n\omega + \frac{n(n-1) \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W$ als Summe aller Widerstände

den Betrag $n\omega + \frac{n(n-1) \cdot (2n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W$ ergeben. Daher

beträgt die Zunahme, welchen die Summe der Widerstände aller Nebenleitungen beim Uebergang von einer ungeraden zur nächst grösseren geraden Anzahl von Systemen erfährt: $n\omega + 2n(n-1) \cdot W$. Vermehrt man die Anzahl μ abermals um eins, so tritt ein neues inneres System hinzu, dessen Nebenleitungen die Widerstandssumme um $n\omega + n(n-1) \cdot W$ erhöhen. Dagegen wird ΣW_v für das letzte äussere System um $n(n-1) \cdot W$ kleiner, weil dieses in ein solches ungerader Ordnung übergeht. Beim Uebergang von einer geraden Anzahl μ zu der um

eins grösseren ungeraden ändert sich folglich $\sum_{\lambda=1, v=1}^{\lambda=\mu, v=n} W_v^{(\lambda)}$

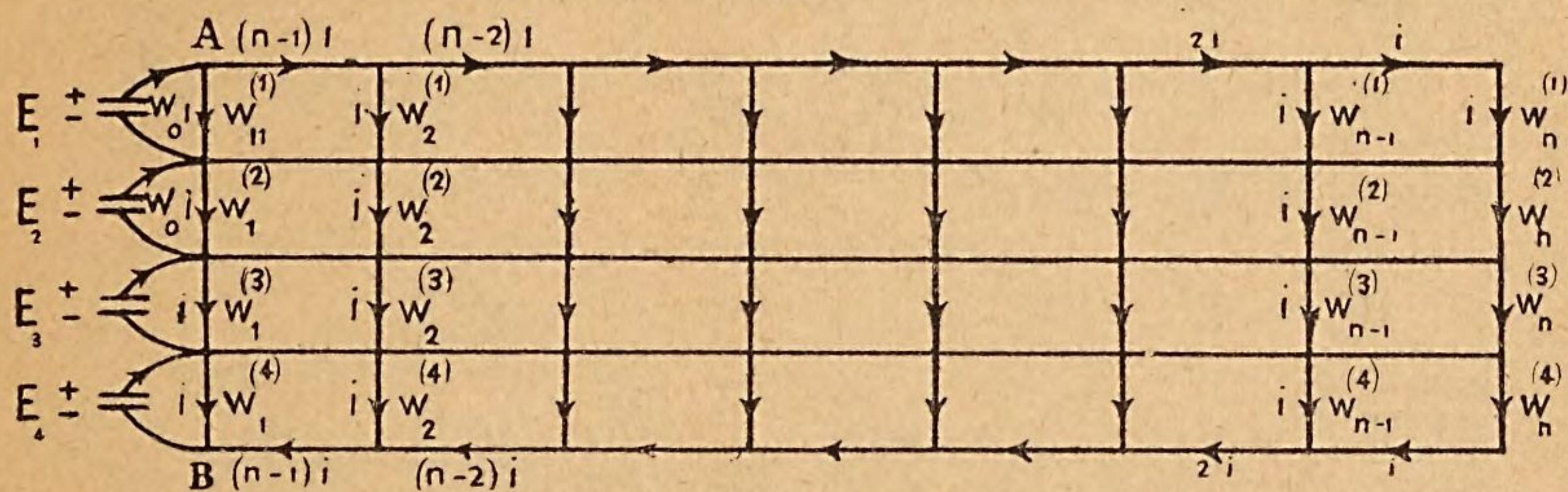
nur um $n \cdot \omega$, d. h. um die Widerstände der neu hinzugekommenen Lampen. Aehnliche Betrachtungen erklären

den ungleichen Zuwachs von $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{\Sigma E_\lambda}{i}$ beim Ueber-

gang von ungeradem zu geradem μ und von geradem zu ungeradem μ , wie er in den Formeln II und III enthalten ist.

Lässt man von jedem Knotenpunkte der innern Hauptleitungen zwei Abzweigungen nach den beiden benachbarten Hauptleitungen gehen, wie dies in Fig. 3 veranschaulicht wird, so findet man durch die entsprechenden Betrachtungen für die Summe der Widerstände aller Nebenleitungen, für die verbrauchte Arbeit und die erforderliche electromotorische Kraft etwas einfachere Formeln.

Fig. 3.



a) In den beiden äussern Systemen ist

$$\begin{aligned}
 E_1 &= n i \cdot W_0 + i W_1^{(1)} \\
 0 &= (n-1) \cdot W + W_2^{(1)} - W_1^{(1)} \\
 0 &= (n-2) \cdot W + W_3^{(1)} - W_2^{(1)} \\
 &\dots \dots \dots \\
 0 &= 2 \cdot W + W_{n-1}^{(1)} - W_{n-2}^{(1)} \\
 0 &= 1 \cdot W + W_n^{(1)} - W_{n-1}^{(1)}
 \end{aligned}$$

In Folge dessen müssen die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned}
 W_n^{(1)} &= \omega \\
 W_{n-1}^{(1)} &= \omega + W \\
 W_{n-2}^{(1)} &= \omega + W + 2W
 \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} W_1^{(1)} &= \omega + W + 2W + \dots + (n-2)W + (n-1) \cdot W \\ \sum_{v=1}^{v=n} W_v^{(1)} &= n \cdot \omega + \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\ \frac{E_1}{i} &= \omega + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot W + n W_o \end{aligned}$$

b) Für alle innern Systeme gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} E_2 &= n i W_o^{(2)} + i W_1^{(2)} \\ 0 &= W_1^{(2)} - W_2^{(2)} = W_2^{(2)} - W_3^{(2)} = \dots = W_{n-1}^{(2)} - W_n^{(2)}, \end{aligned}$$

daher ist für diese:

$$\begin{aligned} W_1^{(2)} &= W_2^{(2)} = W_3^{(2)} = \dots = W_n^{(2)} = \omega \\ \sum_{v=1}^{v=n} W_v^{(2)} &= n \omega \quad \text{und} \quad \frac{E_2}{i} = W + n \cdot W_o. \end{aligned}$$

Sind μ Systeme in dieser Weise mit einander ver-

bunden, so werden die Grössen $\sum_{\lambda=1, v=1}^{\lambda=\mu, v=n} W_v^{(\lambda)}, \frac{A}{i^2}, \frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} E_\lambda}{i}$

durch die Formeln dargestellt:

$$\sum_{\lambda=1, v=1}^{\lambda=\mu, v=n} W_v^{(\lambda)} = \mu \cdot n \cdot \omega + \frac{1}{3} (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot W \quad \text{IV}$$

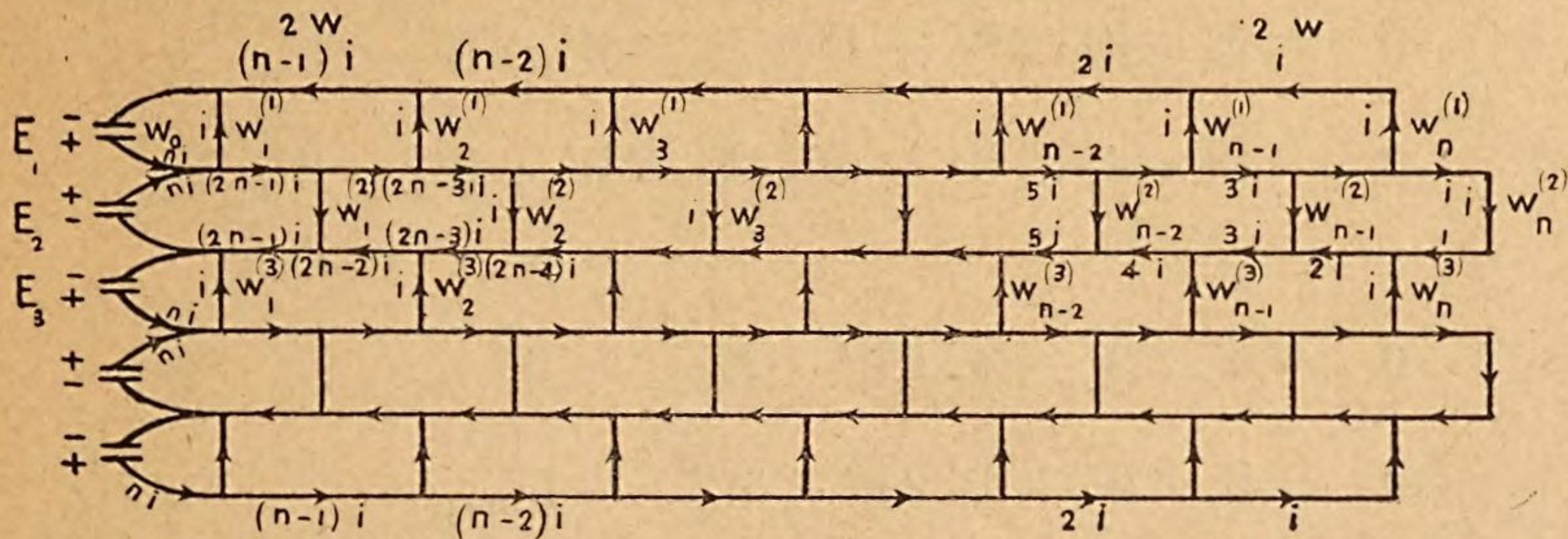
$$\frac{A}{i^2} = \mu \cdot n \omega + \mu \cdot n^2 \cdot W_o + n^2 (n-1) \cdot W \quad \text{V}$$

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} E_\lambda}{i} = \mu \cdot \omega + \mu \cdot n \cdot W_o + n (n-1) \cdot W \quad \text{VI}$$

Wir untersuchen nun die beiden Verzweigungsarten unter der Annahme, dass je zwei benachbarte Dynamomaschinen mit entgegengesetzt gerichteten electromotorischen Kräften thätig sind. Die erste Verzweigungs-

weise führt dann zu der Stromvertheilung, die in Fig. 4 für $2k+1=5$, also für $k=2$, dargestellt ist.

Fig. 4.



a) Bei ungerader Anzahl der Systeme ($\mu = 2k+1$) ergeben die beiden äusseren Systeme:

$$E_1 = n i W_0 + i \cdot W_1^{(1)}$$

$$0 = (2n-1) \cdot W + (2n-2) \cdot W + (n-1) \cdot 2W + W_2^{(1)} - W_1^{(1)}$$

$$0 = (2n-3) \cdot W + (2n-4) \cdot W + (n-2) \cdot 2W + W_3^{(1)} - W_2^{(1)}$$

.....

$$0 = 5 \cdot W + 4 \cdot W + 2 \cdot 2W + W_{n-1}^{(1)} - W_{n-2}^{(1)}$$

$$0 = 3 \cdot W + 2 \cdot W + 1 \cdot 2W + W_n^{(1)} - W_{n-1}^{(1)}$$

Daraus folgt:

$$W_n^{(1)} = \omega$$

$$W_{n-1}^{(1)} = \omega + 7W$$

$$W_{n-2}^{(1)} = \omega + 7W + 13W$$

.....

$$W_1^{(1)} = \omega + 7W + 13W + 19W + \dots + (6n-11)W + (6n-5) \cdot W$$

$$E_1 = n i W_0 + i \cdot W_1^{(1)}$$

b) In den inneren Systemen gerader Ordnung (2λ) ist

$$E_{2\lambda} = n i W_0 + i . W_1 + (2 n - 1) . 2 W$$

$$0 = (2n-2) \cdot 2W + (2n-3) \cdot 2W + W_2 - W_1$$

$$0 = (2n-4) \cdot 2W + (2n-5) \cdot 2W + W_3^{(2\lambda)} - W_2^{(2\lambda)}$$

• • • • •

$$0 = 4 \cdot 2W + 3 \cdot 2W + W_{n-1}^{(2\lambda)} - W_{n-2}^{(2\lambda)}$$

$$0 = 2 \cdot 2W + 1 \cdot 2W + W_n^{(2\lambda)} - W_{n-1}^{(2\lambda)}$$

In anderer Form lauten diese Gleichungen:

$$W_n = \omega$$

$$W_{n-1}^{(2\lambda)} = \omega + 6W$$

$$W_{n-2}^{(2\lambda)} = \omega + 6W + 14W$$

• • • • •

$$W_1^{(2\lambda)} = \omega + 6W + 14W + \dots + (8n-18)W + (8n-10) \cdot W$$

$$E_{2\lambda} = n i W_0 + i \cdot W_1 + (2n-1) \cdot 2W.$$

c) Die innern Systeme von ungerader Ordnung $(2\lambda + 1)$ führen zu folgenden Relationen:

$$E_{2\lambda+1} = n i W_0^{(2\lambda+1)} + i \cdot W_1^{(2\lambda+1)}$$

$$0 = (2^{n-1}) \cdot 2^W + (2^{n-2}) \cdot 2^W + W_2^{(2\lambda+1)} - W_1^{(2\lambda+1)}$$

$$0 = (2n-3) \cdot 2W + (2n-4) \cdot 2W + W_3^{(2\lambda+1)} - W_1^{(2\lambda+1)}$$

• • • • •

$$0 = 5 \cdot 2W + 4 \cdot 2W + W_{n-1}^{(2\lambda+1)} - W_{n-2}^{(2\lambda+1)}$$

$$0 = 3 \cdot 2W + 2 \cdot 2W + W_n^{(2\lambda+1)} - W_{n-1}^{(2\lambda+1)}$$

oder

$$W_n^{(2\lambda+1)} = \omega$$

$$W_{n-1}^{(2\lambda+1)} = \omega + 10W$$

$$W_{n-2}^{(2\lambda+1)} = \omega + 10W + 18W$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$W_1^{(2\lambda+1)} = \omega + 10W + 18W + 26W + \dots \\ + (8n-14)W + (8n-6)W$$

$$E_{2\lambda+1} = n i W_0 + i W_1^{(2\lambda+1)}$$

Aus diesen drei Gleichungssystemen lassen sich als allgemeine Gesetze ablesen:

1. Bei entgegengesetzt gerichteten electromotorischen Kräften der benachbarten Maschinen nehmen die Widerstände $W_v^{(\lambda)}$ der Nebenleitungen in allen Systemen in arithmetischer Progression zweiter Ordnung mit der Entfernung vom freien Ende zu. Für die innern Systeme ist die Differenz der Progression gleich $8W$, d. h. gleich dem achtfachen Widerstand zwischen zwei auf einander folgenden Knotenpunkten der innern Hauptleitungen. In den beiden äussern Systemen beträgt die Differenz $6W$, daher nehmen die Widerstände ihrer Nebenleitungen langsamer zu.

2. Die erforderliche electromotorische Kraft von jedem System nimmt in arithmetischer Progression erster Ordnung mit der Lampenanzahl n zu. Die beiden äussern Systeme erfordern eine geringere electromotorische Kraft, weil in ihnen die Differenz der Progression gleich $6W$, in den innern Systemen dagegen gleich $8W$ ist.

Bilden wir die Summe der Widerstände aller Nebenleitungen des ganzen Netzes, so erhalten wir zunächst von den k innern Systemen gerader Ordnung:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1, \quad v=1}^{\lambda=k, \quad v=n} W_v^{(2\lambda)} &= k \cdot n \cdot \omega + 6k \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} W + \\ + 8k \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} W &= k \cdot n \cdot \omega + k \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (4n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2W \end{aligned}$$

Die $(k-1)$ innern Systeme ungerader Ordnung liefern die Summe:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1, \quad v=1}^{\lambda=k-1, \quad v=n} W_v^{(2\lambda+1)} &= (k-1) \cdot n \cdot \omega + (k-1) \cdot 10 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot W + \\ + (k-1) \cdot 8 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} W &= (k-1) \cdot n \cdot \omega + \\ + (k-1) \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (4n+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2W \end{aligned}$$

Dazu kommen die Widerstände der beiden äussersten Systeme mit der Summe:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{v=1}^{v=n} W_v^{(1)} &= 2n\omega + 14 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot W + 12 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W = \\ &= 2n\omega + \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6W \end{aligned}$$

Die totale Summe der Widerstände sämtlicher Nebenleitungen des Netzes beträgt somit:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2k+1} W_v^{(\lambda)} = (2k+1)n\omega + 4(4k+1) \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \quad 7.$$

Die ganze verbrauchte Arbeit, welche während der Zeiteinheit in allen Lampen die Stromstärke eins zu unterhalten vermag, wird durch den Ausdruck dargestellt:

$$\begin{aligned} \frac{A}{i^2} &= (2k+1) \cdot n \omega + (2k+1) \cdot n^2 \cdot W_0 + \\ + 4(4k+1) \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W &+ 2k \cdot W[1^2 + 2^2 + \dots + (2n-1)^2] + \\ + 4W[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] \cdot W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{i^2} = & (2k+1)n\omega + (2k+1)n^2.W_o + \\ & + 4(4k+1)\frac{(n-1).n(n+1)}{1.2.3}.W + 2k\frac{(2n-1).2n(4n-1)}{1.2.3}.W + \\ & + 4.\frac{(n-1).n(2n-1)}{1.2.3}.W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{i^2} = & (2k+1)n\omega + (2k+1)n^2.W_o + \\ & + [(4k+1).n^2 - (2k+1).n - k].2nW \quad 8. \end{aligned}$$

Für die nöthigen electromotorischen Kräfte und ihre Summe findet man aus obigen drei Gleichungssystemen:

$$E_1 = niW_o + i.\omega + \frac{(6n+2).(n-1)}{1.2}.i.W$$

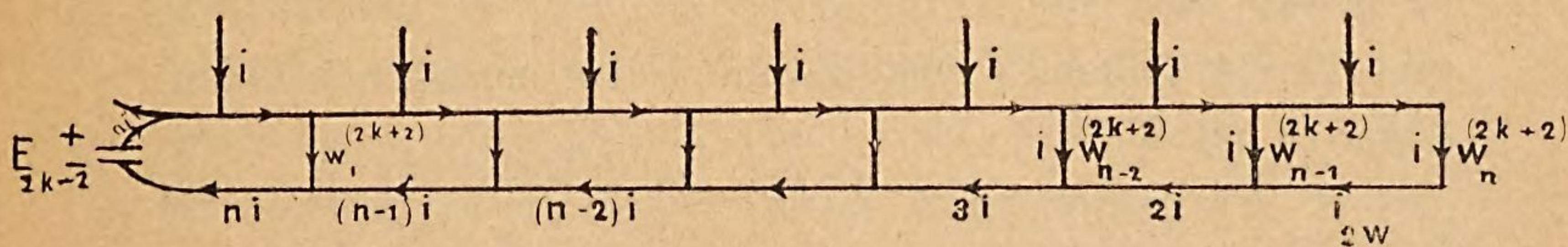
$$E_{2\lambda} = niW_o + i.\omega + \frac{(8n-4).(n-1)}{1.2}.i.W + (2n-1).i.2W$$

$$E_{2\lambda+1} = niW_o + i.\omega + \frac{(8n+4).(n-1)}{1.2}.i.W$$

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2k+1} E_{2\lambda} = & k.E_{2\lambda} + (k-1)E_{2\lambda+1} + 2.E_1 = \\ = & (2k+1).\omega + (2k+1)n.W_o + \\ & + [(4k+1).n^2 - (2k+1).n - k].2W \quad 9. \end{aligned}$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich, wenn die Anzahl der Systeme eine gerade ist. Das letzte äussere System zeigt dann die Stromvertheilung von Fig. 5.

Fig. 5.



In demselben wird:

$$W_n^{(2k+2)} = \omega$$

$$W_{n-1}^{(2k+2)} = \omega + 5W$$

$$W_{n-2}^{(2k+2)} = \omega + 5W + 11W$$

$$\begin{aligned} W_1^{(2k+2)} &= \omega + 5W + 11W + \dots + (6n-13)W + (6n-7)W \\ \sum_{v=1}^{v=n} W_v^{(2k+2)} &= n\omega + 5 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot W + 6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W = \\ &= n\omega + \frac{1}{2} n(n-1) \cdot (2n+1) \cdot W \end{aligned}$$

$$\frac{E_{2k+2}}{i} = \omega + nW_o + (2n-1) \cdot W + \frac{(n-1)(6n-2)}{1 \cdot 2} \cdot W$$

Alle Widerstände der Nebenleitungen des ganzen Netzes ergeben in diesem Falle die Summe:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2k+2} W_v^{(\lambda)} = (2k+2) \cdot \omega + 4(4k+3) \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \quad 10.$$

Die totale verbrauchte Arbeit pro Zeiteinheit wird

$$\begin{aligned} \frac{A}{i^2} &= (2k+2) \cdot n \cdot \omega + (2k+2) \cdot n^2 \cdot W_o + \\ &+ [2(4k+3) \cdot n^2 - 4(k+1) - (2k+1)] \cdot nW \quad 11. \end{aligned}$$

und die Summe der electromotorischen Kräfte

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2k+2} E_\lambda}{i} &= (2k+2) \cdot \omega + (2k+2) \cdot nW_o + \\ &+ [2(4k+3) \cdot n^2 - 4(k+1) - (2k+1)] \cdot W \quad 12. \end{aligned}$$

Bezeichnet μ die Anzahl der Systeme für beide Fälle, so lassen sich die Formeln 7. und 10., 8. und 11., 9. und 12. in folgende gemeinsame Form zusammenfassen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} W_v^{(\lambda)} = \mu \cdot n \cdot \omega + 4 \cdot (2\mu-1) \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \quad \text{VII}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{i^2} &= \mu \cdot n \cdot \omega + \mu \cdot n^2 \cdot W_o + \\ &+ [2(2\mu-1) \cdot n^2 - 2\mu \cdot n - (\mu-1)] \cdot n \cdot W \quad \text{VIII} \end{aligned}$$

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} E_\lambda}{i} = \mu \cdot \omega + \mu \cdot n \cdot W_o + [2(2\mu-1) \cdot n^2 - 2\mu \cdot n - (\mu-1)] \cdot W \quad \text{IX}$$

Für die zweite Verzweigungsart ergibt sich bei entgegengesetzt gerichteten electromotorischen Kräften die Stromvertheilung, welche Fig. 6 darstellt. Die entsprechenden Formeln für $\sum W_v^{(\lambda)}$, $\frac{A}{i^2}$, $\frac{\sum E}{i}$ lauten in diesem Falle:

$$\sum_{\lambda=1, v=1}^{\lambda=\mu, v=n} W_v^{(\lambda)} = \mu \cdot n \cdot \omega + (4\mu - 2) \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \quad \text{X}$$

$$\frac{A}{i^2} = \mu \cdot n \cdot \omega + \mu \cdot n^2 \cdot W_o + (2\mu - 1) n^2 \cdot (n-1) \cdot W \quad \text{XI}$$

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} E_\lambda}{i} = \mu \cdot \omega + \mu \cdot n \cdot W_o + (2\mu - 1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot W \quad \text{XII}$$

Bei gleichgerichteten electromotorischen Kräften aller Dynamomaschinen bedingt eine Vermehrung der Systeme eine Erhöhung der Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten *A* und *B* der ganzen Maschinenreihe (s. Fig. 3). Da diese Potentialdifferenz aus verschiedenen praktischen Gründen eine bestimmte Grenze nicht überschreiten darf, so kann nur eine beschränkte Anzahl von Dynamomaschinen im gleichen Sinne geschaltet werden. Um bei einer grösseren Anzahl von neben einander liegenden parallelen Systemen dennoch die Vortheile gleich gerichteter electromotorischer Kräfte benützen zu können, kann man eine Combination von gleich und ungleich gerichteten electromotorischen Kräften zur Anwendung bringen. Es können in ϱ Gruppen zu je μ Systemen die electromotorischen Kräfte so angeordnet werden, dass sämtliche electromotorische Kräfte derselben Gruppe unter sich gleichgerichtet, dagegen denjenigen der benachbarten Gruppen entgegengesetzt sind (s. Fig. 7 für $\varrho = 4$, $\mu = 3$). Durch Verbindung solcher Gruppen entstehen drei Arten von Systemen:

1. Zwei äussere mit durchströmter äusserer Hauptleitung,

2. $\varrho \cdot (\mu - 2)$ innere Systeme mit stromlosen Hauptleitungen,

3. $2 \cdot (\varrho - 1)$ innere Systeme mit einer durchflossenen Hauptleitung.

Für die beiden ersten Arten sind die Gleichungen oben bereits entwickelt worden. In den Systemen der dritten Art bestehen die Beziehungen:

Fig. 6.

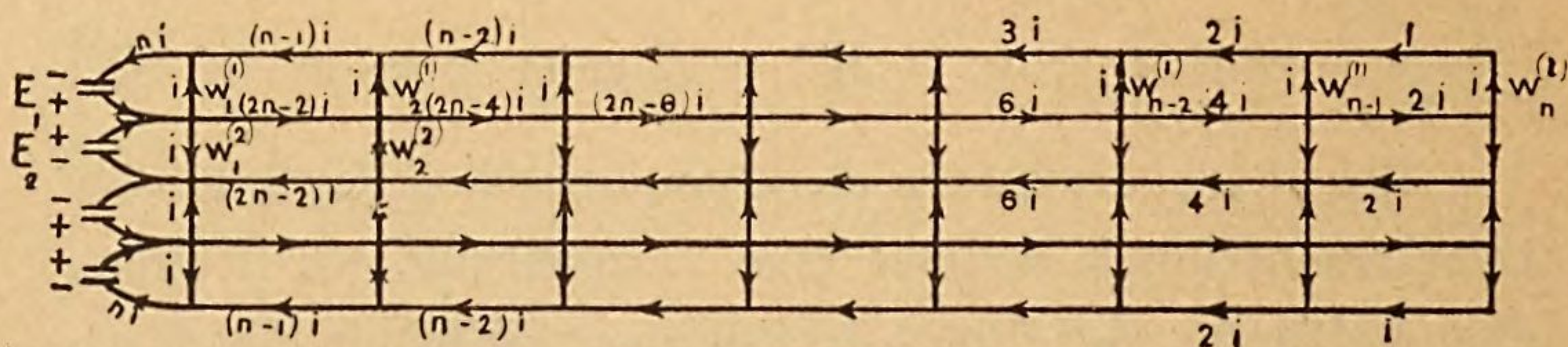
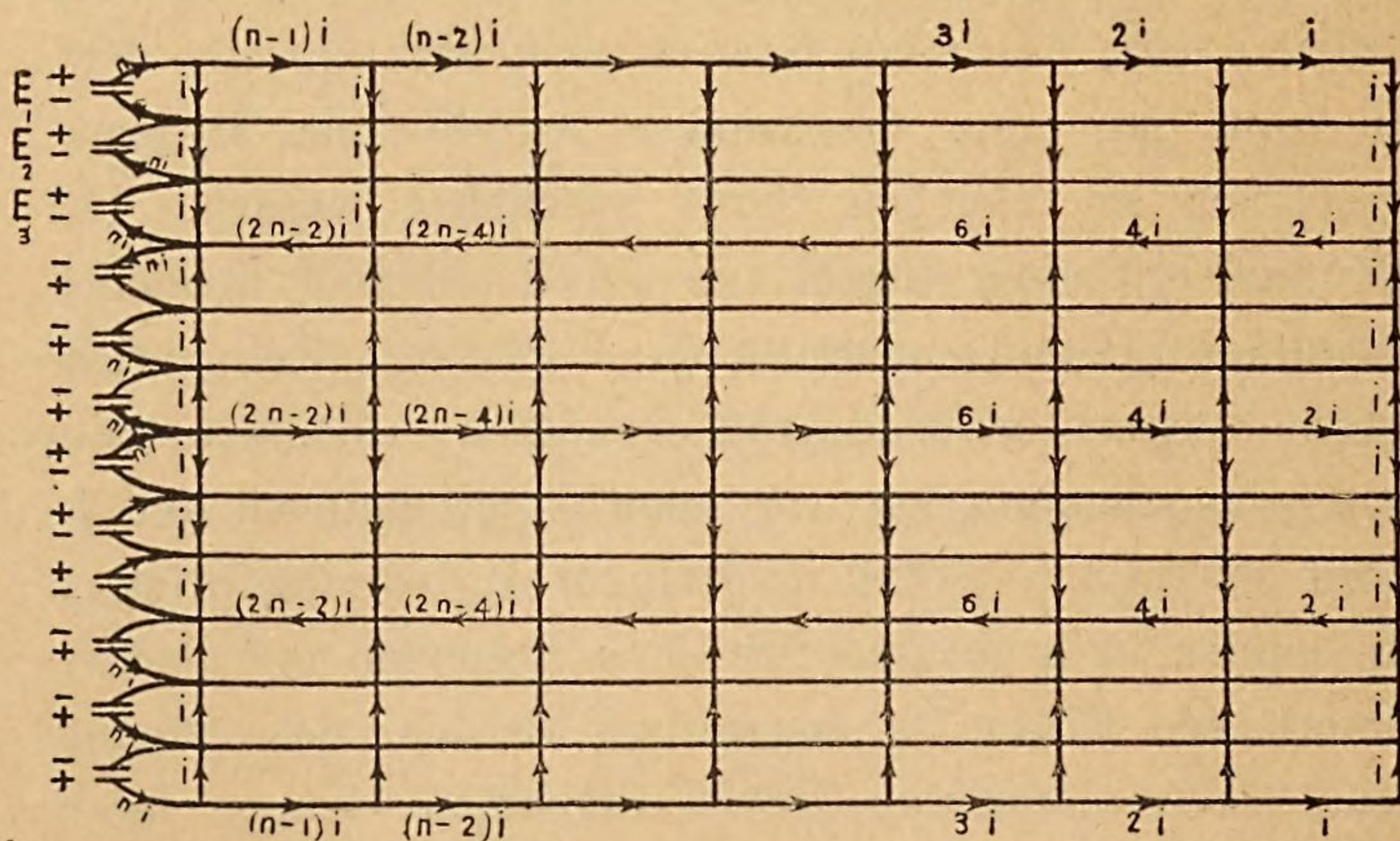


Fig. 7.



$$\begin{aligned} E &= n i W_0 + i \cdot W_1 \\ 0 &= (2 n - 2) \cdot W + W_2 - W_1 \\ 0 &= (2 n - 4) W + W_3 - W_2 \end{aligned}$$

.

$$0 = 2 \cdot W + W_n - W_{n-1}$$

oder

$$W_n = \omega$$

$$W_{n-1} = \omega + 2W$$

$$W_{n-2} = \omega + 2W + 4W$$

.

$$W_1 = \omega + 2W + 4W + \dots + (2n-4)W + (2n-2) \cdot W$$

Somit ist in diesen Systemen die Summe der Widerstände aller Nebenleitungen:

$$\sum_{v=1}^{v=n} W_v = n\omega + \frac{1}{3} \cdot (n-1) \cdot n(n+1) \cdot W$$

und die electromotorische Kraft

$$\frac{E}{i} = \omega + nW_o + n(n-1) \cdot W$$

Alle ϱ Gruppen ergeben aus den $\varrho \cdot \mu$ Systemen, welche sie enthalten, für $\sum W_v^{(\lambda)}$, $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{\sum E}{i}$ die Ausdrücke:

$$\sum W_v^{(\lambda)} = \varrho \cdot \mu \cdot n \cdot \omega + \frac{1}{3} \cdot (2\varrho-1) \cdot (n-1) \cdot n(n+1) \cdot W \quad \text{XIII}$$

$$\frac{A}{i^2} = \varrho \cdot \mu \cdot n \cdot \omega + \varrho \cdot \mu \cdot n^2 \cdot W_o + (2\varrho-1) \cdot n^2 \cdot (n-1) \cdot W \quad \text{XIV}$$

$$\frac{\sum E_\lambda}{i} = \varrho \cdot \mu \cdot \omega + \varrho \cdot \mu \cdot nW_o + (2\varrho-1) n(n-1) \cdot W \quad \text{XV}$$

. Aus den Formeln I—XV kann man als allgemeine Gesetze erkennen:

1. Die Summe der Widerstände aller Nebenleitungen (daher auch die in allen Nebenleitungen verbrauchte Arbeit) und ebenso die totale verbrauchte Arbeit des ganzen Netzes sind Functionen dritten Grades der Lampenanzahl n jedes einzelnen Systems, lineare Functionen von

der Anzahl μ der Systeme einer Gruppe mit gleichgerichteten Dynamomaschinen und lineare Functionen von der Anzahl ϱ dieser Gruppen. Eine Vergrößerung des Netzes nach der Länge zieht daher eine stärkere Vermehrung der erforderlichen Arbeit nach sich als eine entsprechende Vergrößerung nach der Breite.

2. Die totale Arbeit, welche in dem Netz geleistet werden muss, damit in jeder Lampe während der Zeiteinheit die Stromstärke eins unterhalten wird, ist das n -fache der totalen electromotorischen Kraft, welche zur Erzeugung dieser Stromstärke erforderlich ist.

Dieses letztere Resultat ist nicht eine Zufälligkeit der Verzweigungsart, sondern eine einfache Folge des Ohm'schen und des Joule'schen Gesetzes. Bedeutet nämlich N den Widerstand, den das ganze von der Stromstärke $n i$ durchflossene Netz repräsentirt, so ist nach dem Ohm'schen Gesetz:

$$\frac{\Sigma E}{N} = n i,$$

ferner nach Joule die totale Arbeit, welche in der Zeiteinheit verbraucht wird

$$A = (n i)^2 \cdot N,$$

wenn, wie dies hier der Fall ist, die ganze aufgewendete Arbeit zur Erwärmung des Leitungsnetzes verwendet wird. Es ist somit

$$\frac{A}{i^2} = n^2 \cdot N = n^2 \cdot \frac{\Sigma E}{n i} = n \cdot \frac{\Sigma E}{i}$$

Die Ausdrücke $\Sigma W_v^{(\lambda)}$, $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{\Sigma E}{i}$ in den Formeln I—XV setzen sich aus zwei Theilen zusammen, einem ersten Theil, der nur von dem Lampenwiderstand, der Anzahl der Lampen und den Dynamomaschinen ab-

hängt und einem zweiten Theil, welcher von den Hauptleitungen und der Art der Stromvertheilung abhängig ist und der in dem Beleuchtungsnetz nicht nutzbar verwendet wird. Wir wollen diesen zweiten Bestandtheil von $\Sigma W_{\nu}^{(\lambda)}$ und $\frac{A}{i^2}$, um eine kurze Bezeichnung für denselben zu haben, kurzweg als nutzlosen Widerstand resp. als nutzlose Arbeit bezeichnen. Der entsprechende Theil von $\frac{\Sigma E_{\lambda}}{i}$ möge electromotorische Kraft E' genannt werden.

Die Formeln I—XV können nun unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden und führen uns zu nachstehenden Folgerungen.

a) Die Vergleichung der Formeln I—XII zeigt, dass es hinsichtlich der verbrauchten Arbeit und der erforderlichen electromotorischen Kraft vortheilhafter ist, den electromotorischen Kräften statt entgegengesetzte gleiche Richtung zu geben. Die beiden Verzweigungsarten (Fig. 1 und 3) ergeben bei gleicher Länge der Hauptleitungen nahezu gleiche Resultate für $\Sigma W_{\nu}^{(\lambda)}$, $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{\Sigma E}{i}$ (vergl. Tab. II, pag. 45—47). Wir führen desshalb die weiteren allgemeinen Untersuchungen nur für die eine Verzweigungsart, nämlich für die zweite (Fig. 3) durch und legen dabei jeweilen die vortheilhaftere Stromvertheilung, d. h. diejenige bei gleichgerichteten electromotorischen Kräften, zu Grunde. Bei stromlosen innern Hauptleitungen sind die nutzlose Arbeit in den Nebenleitungen, diejenige des ganzen Netzes sowie die electromotorische Kraft E' $(2\mu-1)$ -mal kleiner als bei durchströmten innern Hauptleitungen. Das Dreileitersystem z. B. erfordert bei ungleich geschalteten Dynamomaschinen eine dreimal grössere

nutzlose Arbeit in den Nebenleitungen und im ganzen Netz, ferner eine dreimal grössere electromotorische Kraft E' als bei gleichgeschalteten Maschinen und stromloser innerer Hauptleitung.

b) Wir vergleichen ein zusammenhängendes Netz paralleler Systeme (Fig. 3) mit einer gleich grossen Anzahl getrennter unabhängiger Zweileitersysteme von gleicher Gesamtlänge L , gleicher Lampenanzahl n und gleicher Dicke der Hauptleitungen. Für μ getrennte Systeme erhalten wir:

$$\Sigma W_{\nu}^{(\lambda)} = \mu \cdot n \cdot \omega + \mu \cdot \frac{1}{3} (n-1) \cdot n (n+1) \cdot W$$

$$\frac{A}{i^2} = \mu \cdot n \cdot \omega + \mu \cdot n^2 \cdot W + \mu \cdot n^2 (n-1) \cdot W$$

$$\frac{\Sigma E}{i} = \mu \cdot \omega + \mu \cdot n \cdot W_0 + \mu \cdot n (n-1) \cdot W$$

Vergleichen wir diese Werthe mit den Formeln IV, V, VI, so sehen wir, dass man durch Anwendung zusammenhängender, statt getrennter Systeme die nutzlose Arbeit in den Nebenleitungen, diejenige des ganzen Netzes sowie die electromotorische Kraft E' auf den μ -ten Theil reducirt, während gleichzeitig in den Kosten für das Material der Hauptleitungen eine Reduction auf den $\frac{2\mu}{\mu+1}$ -ten Theil eintritt. — Von diesem Resultat macht man in der Praxis durch Anwendung des Dreileitersystems Gebrauch. Das Dreileitersystem benützt jedoch nur die beiden ungünstigsten Systeme eines zusammenhängenden Netzes, nämlich die beiden äussersten Systeme. Eine weit grössere Ersparniss an Arbeit erzielt man, wenn man durch Vermehrung der zusammenhängenden Systeme auch die Vortheile der innern Systeme benützt, da (abgesehen von den kleinen Widerständen

der Zuleitungen zu den Lampen) durch Hinzufügung weiterer innerer Systeme bei der zweiten Verzweigungsart der nutzlose Widerstand, die nutzlose Arbeit und die electromotorische Kraft E' nicht erhöht werden.

Verwendet man für die zusammenhängenden und für die getrennten Systeme dieselbe leitende Masse M für die Summe aller Hauptleitungen, so wird das Verhältniss der Grössen $\Sigma W_v^{(\lambda)}$, $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{\Sigma E}{i}$ zu Gunsten des zusammenhängenden Netzes noch wesentlich besser. Für die μ getrennten Systeme ist

$$M = 2 \mu \cdot L \cdot d \cdot q, \quad W = \frac{L}{n-1} \cdot \frac{w}{q} = \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{2 \mu}{n-1},$$

wo d die Dichtigkeit des Leitungsmaterials (Kupfer), w den specifischen Widerstand desselben und q den Querschnitt der Hauptleitungen bedeutet. Daher wird

$$\begin{aligned} \Sigma W_v^{(\lambda)} &= \mu \cdot n \cdot \omega + \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n(n+1) \cdot 2 \mu^2 \\ \frac{A}{i^2} &= \mu \cdot n \cdot \omega + \mu \cdot n^2 \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n^2 \cdot 2 \mu^2 \\ \frac{\Sigma E}{i} &= \mu \cdot \omega + \mu \cdot n \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n \cdot 2 \mu^2 \end{aligned}$$

Für ein Netz von μ zusammenhängenden Systemen ist

$$M = (\mu+1) \cdot L \cdot d \cdot q, \quad W = \frac{L}{n-1} \cdot \frac{w}{q} = \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{\mu+1}{n-1},$$

daher

$$\begin{aligned} \Sigma W_v^{(\lambda)} &= \mu \cdot n \cdot \omega + \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n(n+1) \cdot (\mu+1) \\ \frac{A}{i^2} &= \mu \cdot n \cdot \omega + \mu \cdot n^2 \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n^2 \cdot (\mu+1) \\ \frac{\Sigma E}{i} &= \mu \cdot \omega + \mu \cdot n \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n \cdot (\mu+1) \end{aligned}$$

Unter der Annahme gleichen Materialaufwandes M für die Summe aller Hauptleitungen reduciren sich also

bei den zusammenhängenden gegenüber den getrennten Systemen der nutzlose Widerstand der Nebenleitungen, die nutzlose Arbeit des ganzen Netzes und die electromotorische Kraft E' auf den $\frac{2\mu^2}{\mu+1}$. ten Theil.

c) Lässt man bei gegebener Lampenanzahl λ und bestimmter Länge L des Zweileitersystems die electromotorische Kraft E in der Mitte statt von einem Ende aus wirken, so ist

$$\begin{aligned}\Sigma W_v &= \lambda \cdot \omega + 2 \cdot \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) \cdot \frac{W}{3} = \\ &= \lambda \cdot \omega + \frac{1}{12} \lambda (\lambda-2) \cdot (\lambda+2) \cdot W\end{aligned}$$

$$\frac{A}{i^2} = \lambda \cdot \omega + \frac{\lambda^2}{2} \cdot W_o + \frac{1}{4} \lambda^2 (\lambda-2) \cdot W$$

$$\frac{E}{i} = 2 \cdot \omega + \lambda \cdot W_o + \frac{1}{2} \lambda (\lambda-2) \cdot W$$

Befindet sich bei übrigens gleichen Verhältnissen die electromotorische Kraft an dem einen Ende des Systems, so nehmen ΣW_v , $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ die Werthe an:

$$\Sigma W_v = \lambda \cdot \omega + \frac{1}{3} \lambda (\lambda-1) (\lambda+1) \cdot W$$

$$\frac{A}{i^2} = \lambda \cdot \omega + \lambda^2 \cdot W_o + \lambda^2 (\lambda-1) \cdot W$$

$$\frac{E}{i} = \omega + \lambda \cdot W_o + \lambda (\lambda-1) \cdot W$$

Bei Anwendung einer Centralstation statt einer Endstation mit der erforderlichen electromotorischen Kraft erhält man somit bei gleichen Anlagekosten eine circa viermal kleinere nutzlose Arbeit in den Nebenleitungen und im ganzen Netz und reducirt die electromotorische Kraft E' ungefähr auf die Hälfte.

d) Führen wir in den Formeln IV, V, VI die totale Lampenanzahl des ganzen Netzes, $\sigma = \mu \cdot n$, ein, so gehen dieselben über in

$$\begin{aligned}\Sigma W_v^{(\lambda)} &= \sigma \cdot \omega + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\mu^3} \cdot \sigma (\sigma - \mu) (\sigma + \mu) \cdot W \\ \frac{A}{i^2} &= \sigma \cdot \omega + \sigma \cdot n \cdot W_o + \frac{1}{\mu^3} \cdot \sigma^2 \cdot (\sigma - \mu) \cdot W \\ \frac{\Sigma E}{i} &= \mu \cdot \omega + \sigma \cdot W_o + \frac{1}{\mu^2} \cdot \sigma (\sigma - \mu) \cdot W\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass bei gegebener totaler Lampenanzahl σ , bei bestimmter Dicke der Hauptleitungen und bei gleichen Abständen der Lampen mit wachsendem μ die nutzlose Arbeit in den Nebenleitungen und im ganzen Netze, ferner die electromotorische Kraft E' abnehmen und für $\mu = \sigma$ den kleinsten Werth erhalten (vergl. 1. pag. 27).

Setzt man statt gleicher Lampenabstände gleiche Länge L der Hauptkanäle voraus, so hat man in den drei letzten Gleichungen

$$W = \frac{L}{n-1} \cdot \frac{w}{q} = \frac{L \cdot w}{q} \cdot \frac{\mu}{\sigma - \mu}$$

zu setzen. Dadurch erhält man:

$$\begin{aligned}\Sigma W_v^{(\lambda)} &= \sigma \cdot \omega + \frac{1}{3} \cdot \frac{L \cdot w}{q} \cdot \frac{\sigma \cdot (\sigma + \mu)}{\mu^2} \\ \frac{A}{i^2} &= \sigma \cdot \omega + \sigma \cdot n \cdot W_o + \frac{L \cdot w}{q} \cdot \frac{\sigma^2}{\mu^2} \\ \frac{\Sigma E}{i} &= \mu \cdot \omega + \sigma \cdot W_o + \frac{L \cdot w}{q} \cdot \frac{\sigma}{\mu}\end{aligned}$$

Mit wachsendem μ nimmt also auch bei gegebener Länge aller Hauptleitungen die nutzlose Arbeit in den Nebenleitungen, ebenso diejenige des ganzen Netzes, ferner die electromotorische Kraft E' ab, dagegen nimmt der Materialaufwand für die Hauptkanäle proportional $\mu + 1$ zu. Unter den obigen Voraussetzungen ist somit

bezüglich der verbrauchten Arbeit und der electromotorischen Kraft E' das Zweileitersystem das ungünstigste, erfordert jedoch den geringsten Materialaufwand.

e) Wir untersuchen nun die Frage: Ist es mit Rücksicht auf die zu leistende Arbeit und die nöthige electromotorische Kraft vortheilhafter, bei gegebener Länge L der zu beleuchtenden Fläche und gegebenem Materialaufwand M für die Hauptleitungen, diese Leitungsmasse M auf zwei oder mehr parallele Hauptkanäle zu vertheilen? Unter den gemachten Annahmen ist für μ Systeme:

$$M = (\mu + 1) \cdot L \cdot d \cdot q, \quad \frac{1}{q} = \frac{L \cdot d}{M} \cdot (\mu + 1).$$

Die Ausdrücke für $\Sigma W_v^{(\lambda)}$, $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{\Sigma E}{i}$ gehen folglich über in:

$$\begin{aligned} \Sigma W_v^{(\lambda)} &= \sigma \cdot \omega + \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \sigma \cdot (\sigma + \mu) \cdot \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \\ \frac{A}{i^2} &= \sigma \cdot \omega + \sigma \cdot n \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \\ \frac{\Sigma E}{i} &= \mu \cdot \omega + \sigma \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \sigma \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \end{aligned}$$

Für das Zweileitersystem wird unter den gleichen Annahmen;

$$M = 2 \cdot L \cdot d \cdot q, \quad W = \frac{L}{\sigma - 1} \cdot \frac{w}{q} = \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{2}{\sigma - 1},$$

folglich

$$\begin{aligned} \Sigma W_v &= \sigma \cdot \omega + \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot 2 \sigma (\sigma + 1) \\ \frac{A}{i^2} &= \sigma \cdot \omega + \sigma \cdot n \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot 2 \sigma^2 \\ \frac{E}{i} &= \mu \cdot \omega + \sigma \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot 2 \sigma \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass auch bei gleicher Gesamtlänge L und gleichem Materialaufwand M ein

Netz mit mehreren parallelen Hauptleitungen hinsichtlich der verbrauchten Arbeit und der electromotorischen Kraft E' günstiger ist als das Zweileitersystem. Die nutzlos verbrauchte Arbeit ist bei μ parallelen Systemen $\frac{2\mu^2}{\mu+1}$, die electromotorische Kraft E' $\frac{2\mu}{\mu+1}$ mal kleiner als beim Zweileitersystem.

f) Lässt man in der Stromvertheilung von Fig. 3 die Anordnung aller Lampen unverändert, verwendet aber das Leitungsmaterial sämtlicher innern Hauptleitungen für die beiden äussern Hauptkanäle, so entsteht ein Zweileitersystem mit n parallel geschalteten Gruppen von je μ Lampen, also eine Combination von Parallel- und Hintereinanderschaltung. Die Ausdrücke für $\Sigma W_v^{(\lambda)}$, $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{\Sigma E}{i}$ werden dann immer noch durch die Formeln IV, V, VI dargestellt. Dagegen hat man in denselben nun:

$$M = 2 L \cdot d \cdot q, \quad W = \frac{L}{n-1} \cdot \frac{w}{q} = \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{2}{n-1}$$

zu setzen und bekommt so die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Sigma W_v &= \mu \cdot n \cdot \omega + \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot 2 n (n+1) \\ \frac{A}{i^2} &= \mu \cdot n \cdot \omega + \mu \cdot n^2 \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot 2 n^2 \\ \frac{\Sigma E}{i} &= \mu \cdot \omega + \mu \cdot n \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot 2 n, \end{aligned}$$

während für μ Systeme (s. pag. 31)

$$\begin{aligned} \Sigma W_v^{(\lambda)} &= \mu \cdot n \cdot \omega + \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n (n+1) \cdot (\mu+1) \\ \frac{A}{i^2} &= \mu \cdot n \cdot \omega + \mu \cdot n^2 \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n^2 (\mu+1) \\ \frac{\Sigma E}{i} &= \mu \cdot \omega + \mu \cdot n \cdot W_o + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n (\mu+1) \end{aligned}$$

Verwendet man also das Leitungsmaterial der stromlosen innern Hauptleitungen bei der zweiten Verzweigungsart für die beiden äussern Hauptkanäle, so absorbiert dieses Zweileitersystem eine $\frac{\mu+1}{2}$ mal kleinere nutzlose Arbeit in den Nebenleitungen und im ganzen Netz und erfordert eine $\frac{\mu+1}{2}$ mal kleinere electromotorische Kraft E' . Dagegen verlangt diese Anordnung wie auch diejenige von Fig. 3 für die Anfangspunkte A und B der beiden (äussern) Hauptleitungen eine mit μ proportional zunehmende Potentialdifferenz, welcher Umstand der Anwendbarkeit dieser Massenvertheilung eine Grenze setzt.

g) Bei der Bestimmung des vortheilhaftesten Materialaufwandes M für die Hauptkanäle hat man bekanntlich die Summe der jährlichen Amortisationskosten der ganzen Anlage und der Kosten der aufzuwendenden Arbeit des Betriebes zu einem Minimum zu machen. Es bezeichne k_1 die Kosten der Masseneinheit des Leitungsmaterials (Kupfer), k_1' die Kosten der Isolirung und des Legens einer Hauptleitung pro Längeneinheit, e den Zinsfactor der Amortisation, r die Anzahl der Jahre, innerhalb welcher die Anlage amortisirt werden muss (Lebensdauer der Anlage), k_2 die Kosten der Arbeitseinheit, z die jährliche Brennzeit der Lampen, dann sind die Kosten k_1 der Amortisation und diejenigen, k_2 , der verbrauchten Arbeit per Jahr:

$$K_1 = [k_1 \cdot M + k_1' \cdot (\mu + 1) L] \cdot e^r \cdot \frac{e - 1}{e^{r+1} - 1}$$

$$K_2 = k_2 \cdot z \cdot i^2 \cdot \left[\sigma \cdot \omega + \sigma \cdot n \cdot W_0 + \frac{1}{\mu^3} \cdot \sigma^2 \cdot (\sigma - \mu) \cdot W \right],$$

oder, weil

$$M = L \cdot d \cdot q \cdot (\mu + 1), \quad W = \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{(\mu + 1) \cdot \mu}{\sigma - \mu},$$

$$K_2 = k_2 \cdot z \cdot i^2 \cdot \left[\sigma \cdot \omega + \sigma \cdot n \cdot W_0 + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{\mu + 1}{\mu^2} \right]$$

Die jährlichen Gesamtkosten belaufen sich auf

$$K = K_1 + K_2 = [k_1 \cdot M + k' \cdot (\mu + 1) \cdot L] e^r \cdot \frac{e - 1}{e^{r+1} - 1} + \\ + k_2 \cdot z \cdot i^2 \left[\sigma \cdot \omega + \sigma \cdot n \cdot W_0 + \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{\mu + 1}{\mu^2} \right]$$

Die günstigste Masse M' für jedes beliebige μ finden wir aus der Gleichung

$$\frac{dK}{dM} = k_1 \cdot e^r \cdot \frac{e - 1}{e^{r+1} - 1} - k_2 \cdot z \cdot i^2 \cdot \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{\mu + 1}{\mu^2} = 0$$

Sie ergibt:

$$M' = \sigma \cdot L \cdot i \cdot \sqrt[3]{\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{z}{e^r} \cdot \frac{e^{r+1} - 1}{e - 1} \cdot d \cdot w \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \sqrt{\mu + 1}}$$

Der günstigste Materialaufwand M' ist eine Function von μ . Mit wachsendem μ nimmt derselbe proportional $\frac{1}{\mu} \cdot \sqrt{\mu + 1}$ ab, die Kosten für die Isolirung und das Legen der Leitungen nehmen proportional $\mu + 1$ zu. Die vortheilhafteste Anzahl μ erhält man, indem man M' in den Ausdruck für K einsetzt, die Gleichung $\frac{dK}{d\mu} = 0$ bildet und aus ihr den Werth von μ ermittelt. Diese Aufgabe führt auf eine Gleichung fünften Grades, die in jedem speciellen Falle bei gegebenen Werthen der vorkommenden Constanten durch Näherungsmethoden aufgelöst werden kann.

Weil bei μ Systemen $M = (\mu + 1) \cdot L \cdot d \cdot q$, so kann man leicht aus dem Ausdruck des günstigsten Material-

aufwandes M' den günstigsten Querschnitt q' berechnen. Es ist nämlich

$$q' = \sigma \cdot i \cdot \sqrt{\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{z}{e^r} \cdot \frac{e^{r+1} - 1}{e - 1} \cdot \frac{w}{d} \cdot \frac{1}{\mu \cdot \sqrt{\mu + 1}}}$$

Um die aus den allgemeinen Formeln entwickelten Resultate noch etwas besser zu veranschaulichen, specialisiren wir die Formeln I—XV auf die Fälle von 1, 2, 3, 4 und 12 Systemen und berechnen die Ausdrücke $\Sigma W_v^{(\lambda)}$, $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{\Sigma E}{i}$ für einige numerische Beispiele, nämlich für 600, 1200 und 6000 Lampen. Die Specialisirung der allgemeinen Formeln I—XV liefert uns nachstehende Gleichungssysteme. In denselben sind unter *a)* und *b)* die Formeln für gleichgerichtete, unter *c)* und *d)* diejenigen für entgegengesetzt gerichtete electromotorische Kräfte, unter *a)* und *c)* die Gleichungen für die erste, unter *b)* und *d)* diejenigen für die zweite Verzweigungsart (Fig. 3 und 6) angegeben. Die Formeln 12 *e)* sind Specialfälle von XIII, XIV und XV für $\sigma = 4$, $\mu = 3$ (s. Fig. 7).

Die Summe der Widerstände sämtlicher Nebenleitungen des Netzes, welche der in allen Nebenleitungen verbrauchten Arbeit proportional ist, wird dargestellt durch die Formeln:

$$\begin{aligned}
 \varrho=1, \mu=1 \quad \sum_{\lambda=1, v=1}^{\lambda=\mu, v=n} W_v^{(\lambda)} &= n \cdot \omega + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 2a &= 2n \cdot \omega + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W + n(n-1) \cdot W \\
 2b &= 2n \cdot \omega + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 2c &= 2n \cdot \omega + 12 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 2d &= 2n \cdot \omega + 6 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 3a &= 3n \cdot \omega + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W + n(n-1) \cdot W \\
 3b &= 3n \cdot \omega + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 3c &= 3n \cdot \omega + 20 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 3d &= 3n \cdot \omega + 10 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 4a &= 4n \cdot \omega + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W + 3n(n-1) \cdot W \\
 4b &= 4n \cdot \omega + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 4c &= 4n \cdot \omega + 28 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 4d &= 4n \cdot \omega + 14 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 12a &= 12n \cdot \omega + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W + 11n(n-1) \cdot W \\
 12b &= 12n \cdot \omega + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 12c &= 12n \cdot \omega + 92 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 12d &= 12n \cdot \omega + 46 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W \\
 \varrho=4, \mu=3, 12e &= 12n \cdot \omega + 14 \cdot \frac{(n-1) \cdot n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot W
 \end{aligned}$$

Die totale Arbeit, welche von den Dynamomaschinen
in das Netz geführt werden muss, um in allen Lampen

während der Zeiteinheit die Stromstärke eins zu unterhalten, drückt sich in diesen speciellen Fällen folgendermassen aus:

$$\begin{aligned}
 \varrho = 1, \mu = 1 \quad \frac{A}{i^2} &= n \cdot \omega + n^2 \cdot W_0 + n \cdot (n^2 - n) \cdot W \\
 2a &= 2n \cdot \omega + 2n^2 \cdot W_0 + n \cdot (2n^2 - 2n + 1) \cdot W \\
 2b &= 2n \cdot \omega + 2n^2 \cdot W_0 + n \cdot (n^2 - n) \cdot W \\
 2c &= 2n \cdot \omega + 2n^2 \cdot W_0 + n \cdot (6n^2 - 4n - 1) \cdot W \\
 2d &= 2n \cdot \omega + 2n^2 \cdot W_0 + n \cdot (3n^2 - 3n) \cdot W \\
 3a &= 3n \cdot \omega + 3n^2 \cdot W_0 + n \cdot (2n^2 - 2n + 2) \cdot W \\
 3b &= 3n \cdot \omega + 3n^2 \cdot W_0 + n \cdot (n^2 - n) \cdot W \\
 3c &= 3n \cdot \omega + 3n^2 \cdot W_0 + n \cdot (10n^2 - 6n - 2) \cdot W \\
 3d &= 3n \cdot \omega + 3n^2 \cdot W_0 + n \cdot (5n^2 - 5n) \cdot W \\
 4a &= 4n \cdot \omega + 4n^2 \cdot W_0 + n \cdot (2n^2 + 1) \cdot W \\
 4b &= 4n \cdot \omega + 4n^2 \cdot W_0 + n \cdot (n^2 - n) \cdot W \\
 4c &= 4n \cdot \omega + 4n^2 \cdot W_0 + n \cdot (14n^2 - 8n + 3) \cdot W \\
 4d &= 4n \cdot \omega + 4n^2 \cdot W_0 + n \cdot (7n^2 - 7n) \cdot W \\
 12a &= 12n \cdot \omega + 12n^2 \cdot W_0 + n \cdot (2n^2 + 8n + 1) \cdot W \\
 12b &= 12n \cdot \omega + 12n^2 \cdot W_0 + n \cdot (n^2 - n) \cdot W \\
 12c &= 12n \cdot \omega + 12n^2 \cdot W_0 + n \cdot (46n^2 - 24n - 11) \cdot W \\
 12d &= 12n \cdot \omega + 12n^2 \cdot W_0 + n \cdot (23n^2 - 23n) \cdot W \\
 \varrho = 4, \mu = 3, 12e &= 12n \cdot \omega + 12n^2 \cdot W_0 + n \cdot (7n^2 - 7n) \cdot W
 \end{aligned}$$

Für $\frac{\Sigma E}{i}$ ergeben sich die entsprechenden Ausdrücke

aus denjenigen von $\frac{A}{i^2}$, indem man diese einfach durch n dividirt. Wir verzichten darauf, dieselben noch besonders anzuführen, da die Angabe derselben im Wesentlichen nur einer Wiederholung der letzten Formeln gleich käme.

Die Resultate sind für die totale Lampenanzahl $\sigma = 600, 1200, 6000$ in den nachstehenden Tabellen zusammengestellt. Dieselben enthalten nur denjenigen Theil von $\sum W_{\nu}^{(\lambda)}, \frac{A}{i^2}$ und $\frac{\sum E}{i}$, welcher von der Materialvertheilung der Hauptleitungen direct abhängig ist, also denjenigen Theil, den wir kurzweg als nutzlosen Widerstand der Nebenleitungen, als nutzlose Arbeit und als electromotorische Kraft E' bezeichnet haben.

Tabelle I. *Gleicher Querschnitt der Hauptleitungen, gleiche Abstände der auf einander folgenden Knotenpunkte der innern Hauptleitungen.*

A. Summe der Widerstände aller Nebenleitungen. $\sum_{\lambda=1, \nu=1}^{\lambda=\mu, \nu=n} W_{\nu}^{(\lambda)}$

(Unter Weglassung von $\sigma \cdot \omega$.)

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	71 999 800. W	575 999 600. W	71 999 998 000. W
2 a	17 999 800. W	143 999 600. W	17 999 998 000. W
2 b	8 999 900. W	71 999 800. W	8 999 999 000. W
2 c	53 999 400. W	431 998 800. W	53 999 994 000. W
2 d	26 999 700. W	215 999 400. W	26 999 997 000. W
3 a	5 333 200. W	42 666 400. W	5 333 332 000. W
3 b	2 666 600. W	21 333 200. W	2 666 666 000. W
3 c	26 666 000. W	213 332 000. W	26 666 660 000. W
3 d	13 333 000. W	106 666 000. W	13 333 330 000. W
4 a	2 294 600. W	18 179 200. W	2 254 496 000. W
4 b	1 124 950. W	8 999 900. W	1 124 999 500. W
4 c	15 749 300. W	125 998 600. W	15 749 993 000. W
4 d	7 874 650. W	62 999 300. W	7 874 996 500. W
12 a	107 800. W	765 600. W	85 828 000. W
12 b	41 650. W	333 300. W	41 666 500. W
12 c	1 915 900. W	15 331 800. W	1 916 659 000. W
12 d	957 950. W	7 665 900. W	958 329 500. W
12 e	291 550. W	2 331 100. W	291 665 500. W

B. Verbrauchte Arbeit.

$$\frac{A}{i^2}$$

(Unter Weglassung von $\sigma \cdot \omega + n \cdot \sigma \cdot W$.)

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	215 640 000. W	1 726 560 000. W	215 964 000 000. W
2 a	53 920 300. W	431 280 600. W	53 982 003 000. W
2 b	26 910 000. W	215 640 000. W	26 991 000 000. W
2 c	161 639 700. W	1 294 559 400. W	161 963 997 000. W
2 d	80 730 000. W	646 920 000. W	80 793 000 000. W
3 a	15 920 400. W	127 680 800. W	15 992 004 000. W
3 b	7 960 000. W	63 840 000. W	7 996 000 000. W
3 c	79 759 600. W	639 039 200. W	79 975 996 000. W
3 d	39 800 000. W	319 200 000. W	39 980 000 000. W
4 a	6 750 150. W	54 000 300. W	6 750 001 500. W
4 b	3 352 500. W	26 910 000. W	3 372 750 000. W
4 c	47 069 550. W	377 279 100. W	47 231 995 500. W
4 d	23 467 500. W	188 370 000. W	23 609 250 000. W
12 a	270 050. W	2 080 100. W	252 000 500. W
12 b	122 500. W	990 000. W	124 750 000. W
12 c	5 689 450. W	45 758 900. W	5 743 994 500. W
12 d	2 817 500. W	22 770 000. W	2 869 250 000. W
12 e	857 500. W	6 930 000. W	873 750 000. W

C. Electromotorische Kraft.

$$\frac{\Sigma E}{i}$$

(Unter Weglassung von $\mu \cdot \omega + \sigma \cdot W_{\infty}$.)

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	359 400. <i>W</i>	1 438 800. <i>W</i>	35 994 000. <i>W</i>
2 a	179 401. <i>W</i>	718 801. <i>W</i>	17 994 001. <i>W</i>
2 b	89 700. <i>W</i>	359 400. <i>W</i>	8 997 000. <i>W</i>
2 c	538 799. <i>W</i>	2 157 599. <i>W</i>	53 987 999. <i>W</i>
2 d	269 100. <i>W</i>	1 078 200. <i>W</i>	26 991 000. <i>W</i>
3 a	79 602. <i>W</i>	319 202. <i>W</i>	7 996 002. <i>W</i>
3 b	39 800. <i>W</i>	159 600. <i>W</i>	3 998 000. <i>W</i>
3 c	398 798. <i>W</i>	1 597 598. <i>W</i>	39 987 998. <i>W</i>
3 d	199 000. <i>W</i>	798 000. <i>W</i>	19 990 000. <i>W</i>
4 a	45 001. <i>W</i>	180 001. <i>W</i>	4 500 001. <i>W</i>
4 b	22 350. <i>W</i>	89 700. <i>W</i>	2 248 500. <i>W</i>
4 c	313 797. <i>W</i>	1 257 597. <i>W</i>	31 487 997. <i>W</i>
4 d	156 450. <i>W</i>	627 900. <i>W</i>	15 739 500. <i>W</i>
12 a	5 401. <i>W</i>	20 801. <i>W</i>	504 001. <i>W</i>
12 b	2 450. <i>W</i>	9 900. <i>W</i>	249 500. <i>W</i>
12 c	113 789. <i>W</i>	457 589. <i>W</i>	11 487 989. <i>W</i>
12 d	56 350. <i>W</i>	227 700. <i>W</i>	5 738 500. <i>W</i>
12 e	17 150. <i>W</i>	69 300. <i>W</i>	1 746 500. <i>W</i>

Tabelle II. Gleicher Querschnitt q der Hauptleitungen, gleiche Länge L der Hauptleitungen.

A. Summe der Widerstände aller Nebenleitungen. $\Sigma W_r^{(\lambda)}$

$$a = \frac{L \cdot w}{q}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 0000$
1	120 200 .a	480 400 .a	12 002 000 .a
2 a	30 050 .a	120 100 .a	3 000 500 .a
2 b	30 100 .a	120 200 .a	3 001 000 .a
2 c	90 149 .a	360 299 .a	9 001 499 .a
2 d	90 300 .a	360 600 .a	9 003 000 .a
3 a	13 366 .a	53 400 .a	1 333 666 .a
3 b	13 400 .a	53 467 .a	1 334 000 .a
3 c	66 832 .a	266 999 .a	6 668 332 .a
3 d	67 000 .a	267 333 .a	6 670 000 .b
4 a	7 674 .a	30 349 .a	751 749 .a
4 b	7 550 .a	30 100 .a	750 500 .a
4 c	52 673 .a	210 348 .a	5 251 748 .a
4 d	52 850 .a	210 700 .a	5 253 500 .a
12 a	1 089 .a	3 847 .a	85 914 .a
12 b	850 .a	3 367 .a	83 500 .a
12 c	19 353 .a	77 044 .a	1 918 578 .a
12 d	19 550 .a	77 433 .a	1 920 500 .a
12 e	5 950 .a	23 567 .a	584 500 .a

B. Verbrauchte Arbeit.

$$\frac{A}{i^2}$$

$$a = \frac{L \cdot w}{q}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	360 000. <i>a</i>	1 440 000. <i>a</i>	36 000 000. <i>a</i>
2 a	90 017. <i>a</i>	359 700. <i>a</i>	8 998 500. <i>a</i>
2 b	90 000. <i>a</i>	360 000. <i>a</i>	9 000 000. <i>a</i>
2 c	269 849. <i>a</i>	1 079 699. <i>a</i>	26 998 499. <i>a</i>
2 d	270 000. <i>a</i>	1 080 000. <i>a</i>	27 000 000. <i>a</i>
3 a	39 901. <i>a</i>	159 801. <i>a</i>	3 999 001. <i>a</i>
3 b	40 000. <i>a</i>	160 000. <i>a</i>	4 000 000. <i>a</i>
3 c	199 899. <i>a</i>	799 800. <i>a</i>	19 998 999. <i>a</i>
3 d	200 000. <i>a</i>	800 000. <i>a</i>	20 000 000. <i>a</i>
4 a	22 575. <i>a</i>	90 151. <i>a</i>	2 250 751. <i>a</i>
4 b	22 500. <i>a</i>	90 000. <i>a</i>	2 250 000. <i>a</i>
4 c	157 423. <i>a</i>	629 848. <i>a</i>	15 749 248. <i>a</i>
4 d	157 500. <i>a</i>	630 000. <i>a</i>	15 750 000. <i>a</i>
12 a	2 728. <i>a</i>	10 453. <i>a</i>	252 253. <i>a</i>
12 b	2 500. <i>a</i>	10 000. <i>a</i>	250 000. <i>a</i>
12 c	57 469. <i>a</i>	229 944. <i>a</i>	5 749 744. <i>a</i>
12 d	57 500. <i>a</i>	230 000. <i>a</i>	5 750 000. <i>a</i>
12 e	17 500. <i>a</i>	70 000. <i>a</i>	1 750 000. <i>a</i>

C. Electromotorische Kraft.

$$\frac{\Sigma E}{i}$$

$$a = \frac{L \cdot w}{q}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	600 .a	1200 .a	6000 .a
2 a	299,6 .a	599,5 .a	2999,5 .a
2 b	300 .a	600 .a	3000 .a
2 c	899,5 .a	1799,4 .a	8999,5 .a
2 d	900 .a	1800 .a	9000 .a
3 a	199,5 .a	399,5 .a	1999,5 .a
3 b	200 .a	400 .a	2000 .a
3 c	999,5 .a	1999,5 .a	9999,5 .a
3 d	1000 .a	2000 .a	10000 .a
4 a	150,5 .a	300,5 .a	1500,5 .a
4 b	150 .a	300 .a	1500 .a
4 c	1049,5 .a	2099,5 .a	10499,5 .a
4 d	1050 .a	2100 .a	10500 .a
12 a	54,6 .a	104,5 .a	504,5 .a
12 b	50 .a	100 .a	500 .a
12 c	1149 .a	2299,4 .a	11499 .a
12 d	1150 .a	2300 .a	11500 .a
12 e	350 .a	700 .a	3500 .a

Tabelle III. *Gleicher Materialaufwand für die Hauptleitungen, gleiche Abstände der aufeinander folgenden Knotenpunkte der innern Hauptleitungen.*

A. Summe der Widerstände aller Nebenleitungen. $\Sigma W_v^{(\lambda)}$

$$b = \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	86 255 760.10 ³ .b	1 381 247 042.10 ³ .b	863 855 976.10 ⁶ .b
2 a	32 345 641.10 ³ .b	517 966 561.10 ³ .b	323 945 964.10 ⁶ .b
2 b	8 072 910.10 ³ .b	129 383 641.10 ³ .b	80 972 991.10 ⁶ .b
2 c	97 036 922.10 ³ .b	1 555 195 680.10 ³ .b	971 837 892.10 ⁶ .b
2 d	24 218 731.10 ³ .b	388 150 922.10 ³ .b	242 918 973.10 ⁶ .b
3 a	8 511 787.10 ³ .b	136 361 814.10 ³ .b	85 311 979.10 ⁶ .b
3 b	2 122 614.10 ³ .b	34 047 787.10 ³ .b	21 322 661.10 ⁶ .b
3 c	42 558 936.10 ³ .b	681 809 072.10 ³ .b	426 559 893.10 ⁶ .b
3 d	10 613 068.10 ³ .b	170 238 936.10 ³ .b	106 613 307.10 ⁶ .b
4 a	3 430 427.10 ³ .b	54 446 704.10 ³ .b	33 806 168.10 ⁶ .b
4 b	838 088.10 ³ .b	13 454 850.10 ³ .b	8 431 871.10 ⁶ .b
4 c	2 354 520.10 ³ .b	377 365 807.10 ³ .b	236 171 145.10 ⁶ .b
4 d	5 886 614.10 ³ .b	94 183 953.10 ³ .b	59 023 099.10 ⁶ .b
12 a	138 739.10 ³ .b	1 980 607.10 ³ .b	1 114 648.10 ⁶ .b
12 b	26 531.10 ³ .b	428 957.10 ³ .b	270 291.10 ⁶ .b
12 c	2 465 763.10 ³ .b	39 663 367.10 ³ .b	2 489 165.10 ⁶ .b
12 d	610 214.10 ³ .b	9 864 013.10 ³ .b	6 216 683.10 ⁶ .b
12 e	185 717.10 ³ .b	3 002 700.10 ³ .b	1 892 034.10 ⁶ .b

B. Verbrauchte Arbeit.

$$\frac{A}{i^2}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	258 337.10 ⁶ .b	4 140 291.10 ⁶ .b	2 601 936 072.10 ⁶ .b
2 a	96 715.10 ⁶ .b	1 551 316.10 ⁶ .b	971 514 108.10 ⁶ .b
2 b	24 138.10 ⁶ .b	387 505.10 ⁶ .b	242 838 027.10 ⁶ .b
2 c	290 467.10 ⁶ .b	4 656 530.10 ⁶ .b	2 914 866 054.10 ⁶ .b
2 d	72 415.10 ⁶ .b	1 162 515.10 ⁶ .b	728 514 081.10 ⁶ .b
3 a	25 409.10 ⁶ .b	408 068.10 ⁶ .b	255 808 096.10 ⁶ .b
3 b	6 336.10 ⁶ .b	101 889.10 ⁶ .b	63 976 016.10 ⁶ .b
3 c	127 296.10 ⁶ .b	2 042 369.10 ⁶ .b	1 279 296 032.10 ⁶ .b
3 d	31 681.10 ⁶ .b	509 443.10 ⁶ .b	319 680 080.10 ⁶ .b
4 a	10 091.10 ⁶ .b	161 731.10 ⁶ .b	101 216 272.10 ⁶ .b
4 b	2 498.10 ⁶ .b	40 230.10 ⁶ .b	25 278 761.10 ⁶ .b
4 c	70 369.10 ⁶ .b	1 129 951.10 ⁶ .b	708 243 773.10 ⁶ .b
4 d	17 483.10 ⁶ .b	281 613.10 ⁶ .b	176 951 329.10 ⁶ .b
12 a	348.10 ⁶ .b	5 381.10 ⁶ .b	3 272 730.10 ⁶ .b
12 b	78.10 ⁶ .b	1 274.10 ⁶ .b	810 875.10 ⁶ .b
12 c	7 322.10 ⁶ .b	118 378.10 ⁶ .b	74 597 257.10 ⁶ .b
12 d	1 795.10 ⁶ .b	29 305.10 ⁶ .b	18 612 825.10 ⁶ .b
12 e	546.10 ⁶ .b	8 919.10 ⁶ .b	5 664 773.10 ⁶ .b

C. Electromotorische Kraft.

$$\frac{\Sigma E}{i}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	430 561.10 ³ . <i>b</i>	3 450 242.10 ³ . <i>b</i>	4 319 208.10 ⁶ . <i>b</i>
2 a	322 384.10 ³ . <i>b</i>	2 585 552.10 ³ . <i>b</i>	3 238 380.10 ⁶ . <i>b</i>
2 b	80 461.10 ³ . <i>b</i>	645 842.10 ³ . <i>b</i>	80 946.10 ⁶ . <i>b</i>
2 c	968 222.10 ³ . <i>b</i>	7 760 884.10 ³ . <i>b</i>	971 622.10 ⁶ . <i>b</i>
2 d	241 383.10 ³ . <i>b</i>	1 937 525.10 ³ . <i>b</i>	242 838.10 ⁶ . <i>b</i>
3 a	127 045.10 ³ . <i>b</i>	1 020 170.10 ³ . <i>b</i>	127 904.10 ⁶ . <i>b</i>
3 b	31 681.10 ³ . <i>b</i>	254 722.10 ³ . <i>b</i>	31 988.10 ⁶ . <i>b</i>
3 c	636 482.10 ³ . <i>b</i>	5 105 923.10 ³ . <i>b</i>	639 648.10 ⁶ . <i>b</i>
3 d	158 404.10 ³ . <i>b</i>	1 273 608.10 ³ . <i>b</i>	159 840.10 ⁶ . <i>b</i>
4 a	67 276.10 ³ . <i>b</i>	539 103.10 ³ . <i>b</i>	67 478.10 ⁶ . <i>b</i>
4 b	16 651.10 ³ . <i>b</i>	134 101.10 ³ . <i>b</i>	16 853.10 ⁶ . <i>b</i>
4 c	469 127.10 ³ . <i>b</i>	3 766 503.10 ³ . <i>b</i>	472 163.10 ⁶ . <i>b</i>
4 d	116 555.10 ³ . <i>b</i>	938 710.10 ³ . <i>b</i>	117 968.10 ⁶ . <i>b</i>
12 a	6 951.10 ³ . <i>b</i>	53 812.10 ³ . <i>b</i>	6 545.10 ⁶ . <i>b</i>
12 b	1 561.10 ³ . <i>b</i>	12 741.10 ³ . <i>b</i>	1 619.10 ⁶ . <i>b</i>
12 c	146 446.10 ³ . <i>b</i>	1 183 783.10 ³ . <i>b</i>	149 195.10 ⁶ . <i>b</i>
12 d	35 895.10 ³ . <i>b</i>	293 050.10 ³ . <i>b</i>	37 226.10 ⁶ . <i>b</i>
12 e	10 925.10 ³ . <i>b</i>	89 189.10 ³ . <i>b</i>	11 329.10 ⁶ . <i>b</i>

Tabelle IV. *Gleicher Materialaufwand für die Hauptleitungen, gleiche Länge L der Hauptleitungen.*

A. Summe der Widerstände aller Nebenleitungen. $\Sigma W_v^{(\lambda)}$

$$c = \frac{L^2 \cdot d \cdot w}{M}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	240 400. <i>c</i>	960 800. <i>c</i>	24 004 000. <i>c</i>
2 a	90 149. <i>c</i>	360 299. <i>c</i>	9 001 499. <i>c</i>
2 b	90 300. <i>c</i>	360 600. <i>c</i>	9 003 000. <i>c</i>
2 c	270 448. <i>c</i>	1 080 898. <i>c</i>	27 004 498. <i>c</i>
2 d	270 900. <i>c</i>	1 081 800. <i>c</i>	27 009 000. <i>c</i>
3 a	53 466. <i>c</i>	213 600. <i>c</i>	5 334 666. <i>c</i>
3 b	53 600. <i>c</i>	213 867. <i>c</i>	5 336 000. <i>c</i>
3 c	267 328. <i>c</i>	1 067 995. <i>c</i>	26 673 328. <i>c</i>
3 d	268 000. <i>c</i>	1 069 333. <i>c</i>	26 680 000. <i>c</i>
4 a	38 371. <i>c</i>	151 746. <i>c</i>	3 758 746. <i>c</i>
4 b	37 750. <i>c</i>	150 500. <i>c</i>	3 752 500. <i>c</i>
4 c	263 365. <i>c</i>	1 051 741. <i>c</i>	26 258 728. <i>c</i>
4 d	264 250. <i>c</i>	1 053 500. <i>c</i>	26 267 500. <i>c</i>
12 a	14 156. <i>c</i>	50 014. <i>c</i>	1 116 881. <i>c</i>
12 b	11 050. <i>c</i>	43 767. <i>c</i>	1 085 500. <i>c</i>
12 c	251 583. <i>c</i>	1 001 575. <i>c</i>	24 941 508. <i>c</i>
12 d	254 150. <i>c</i>	1 006 633. <i>c</i>	24 966 500. <i>c</i>
12 e	77 350. <i>c</i>	306 367. <i>c</i>	7 598 500. <i>c</i>

B. Verbrauchte Arbeit.

$\frac{A}{i^2}$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	720 000. <i>c</i>	2 880 000. <i>c</i>	72 000 000. <i>c</i>
2 a	270 052. <i>c</i>	1 079 101. <i>c</i>	26 995 501. <i>c</i>
2 b	270 000. <i>c</i>	1 080 000. <i>c</i>	27 000 000. <i>c</i>
2 c	809 548. <i>c</i>	3 239 099. <i>c</i>	80 995 498. <i>c</i>
2 d	810 000. <i>c</i>	3 240 000. <i>c</i>	81 000 000. <i>c</i>
3 a	159 603. <i>c</i>	639 203. <i>c</i>	15 996 003. <i>c</i>
3 b	160 000. <i>c</i>	640 000. <i>c</i>	16 000 000. <i>c</i>
3 c	799 595. <i>c</i>	3 199 199. <i>c</i>	79 995 995. <i>c</i>
3 d	800 000. <i>c</i>	3 200 000. <i>c</i>	80 000 000. <i>c</i>
4 a	112 879. <i>c</i>	450 754. <i>c</i>	11 253 753. <i>c</i>
4 b	112 500. <i>c</i>	450 000. <i>c</i>	11 250 000. <i>c</i>
4 c	787 116. <i>c</i>	3 149 241. <i>c</i>	78 746 241. <i>c</i>
4 d	787 500. <i>c</i>	3 150 000. <i>c</i>	78 750 000. <i>c</i>
12 a	35 461. <i>c</i>	135 886. <i>c</i>	3 279 286. <i>c</i>
12 b	32 500. <i>c</i>	130 000. <i>c</i>	3 250 000. <i>c</i>
12 c	747 099. <i>c</i>	2 989 275. <i>c</i>	74 746 675. <i>c</i>
12 d	747 500. <i>c</i>	2 990 000. <i>c</i>	74 750 000. <i>c</i>
12 e	227 500. <i>c</i>	910 000. <i>c</i>	22 750 000. <i>c</i>

C. Electromotorische Kraft.

$$\frac{\Sigma E}{i}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	1200 .c	2400.c	12 000.c
2 a	898,5.c	1798.c	8 998.c
2 b	900 .c	1800.c	9 000.c
2 c	2698 .c	5398.c	26 998.c
2 d	2700 .c	5400.c	27 000.c
3 a	798 .c	1598.c	7 998.c
3 b	800 .c	1600.c	8 000.c
3 c	3998 .c	7998.c	39 998.c
3 d	4000 .c	8000.c	40 000.c
4 a	752,5.c	1502.c	7 502.c
4 b	750 .c	1500.c	7 500.c
4 c	5247 .c	10497.c	52 497.c
4 d	5250 .c	10500.c	52 500.c
12 a	709 .c	1358.c	6 559.c
12 b	650 .c	1300.c	6 500.c
12 c	14942 .c	29893.c	149 493.c
12 d	14950 .c	29900.c	149 500.c
12 e	4550 .c	9100.c	45 500.c

Tabelle V. *Günstigster Materialaufwand für die Hauptleitungen, gleiche Länge L der Hauptleitungen.*

A. Summe der Widerstände aller Nebenleitungen. $\Sigma W_v^{(2)}$

$$f = \frac{L}{\sigma \cdot i} \cdot \sqrt{\frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{d \cdot w \cdot e^r}{z} \cdot \frac{e - 1}{e^{r+1} - 1}}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	169 998.f	679 388.f	16 973 391.f
2 a	104 095.f	416 007.f	10 394 035.f
2 b	104 269.f	416 385.f	10 395 769.f
2 c	312 286.f	1 248 113.f	31 182 108.f
2 d	312 620.f	1 249 155.f	31 187 307.f
3 a	80 199.f	320 400.f	8 001 999.f
3 b	80 400.f	320 300.f	8 004 000.f
3 c	400 992.f	1 601 992.f	40 009 992.f
3 d	402 000.f	1 604 000.f	40 020 000.f
4 a	68 640.f	271 452.f	6 723 849.f
4 b	67 529.f	269 223.f	6 712 679.f
4 c	471 123.f	1 881 411.f	46 973 041.f
4 d	472 705.f	1 884 555.f	46 988 732.f
12 a	47 114.f	166 457.f	3 717 205.f
12 b	36 777.f	145 665.f	3 612 762.f
12 c	837 319.f	3 333 443.f	83 010 356.f
12 d	845 862.f	3 350 277.f	83 093 535.f
12 e	257 436.f	1 019 651.f	25 289 337.f

B. Verbrauchte Arbeit.

$$\frac{A}{i^2}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	509 117. <i>f</i>	2 036 468. <i>f</i>	50 911 688. <i>f</i>
2 a	311 829. <i>f</i>	1 246 038. <i>f</i>	31 171 720. <i>f</i>
2 b	311 769. <i>f</i>	1 247 077. <i>f</i>	31 176 915. <i>f</i>
2 c	934 786. <i>f</i>	3 740 189. <i>f</i>	93 525 745. <i>f</i>
2 d	935 307. <i>f</i>	3 741 230. <i>f</i>	93 530 743. <i>f</i>
3 a	239 404. <i>f</i>	958 804. <i>f</i>	23 994 004. <i>f</i>
3 b	240 000. <i>f</i>	960 000. <i>f</i>	24 000 000. <i>f</i>
3 c	1 199 392. <i>f</i>	4 798 798. <i>f</i>	119 993 992. <i>f</i>
3 d	1 200 000. <i>f</i>	4 800 000. <i>f</i>	120 000 000. <i>f</i>
4 a	201 924. <i>f</i>	806 333. <i>f</i>	20 131 325. <i>f</i>
4 b	201 246. <i>f</i>	804 984. <i>f</i>	20 124 612. <i>f</i>
4 c	1 407 036. <i>f</i>	5 633 534. <i>f</i>	140 865 558. <i>f</i>
4 d	1 408 723. <i>f</i>	5 634 891. <i>f</i>	140 872 282. <i>f</i>
12 a	118 021. <i>f</i>	452 256. <i>f</i>	10 914 124. <i>f</i>
12 b	108 167. <i>f</i>	432 666. <i>f</i>	10 816 654. <i>f</i>
12 c	2 486 496. <i>f</i>	9 948 909. <i>f</i>	248 771 972. <i>f</i>
12 d	2 487 830. <i>f</i>	9 951 322. <i>f</i>	248 783 038. <i>f</i>
12 e	757 166. <i>f</i>	3 028 663. <i>f</i>	75 716 577. <i>f</i>

C. Electromotorische Kraft.

$$\frac{\Sigma E}{i}$$

μ	$\sigma = 600$	$\sigma = 1200$	$\sigma = 6000$
1	848. <i>f</i>	1697. <i>f</i>	8 485. <i>f</i>
2 a	1038. <i>f</i>	2076. <i>f</i>	10 391. <i>f</i>
2 b	1039. <i>f</i>	2078. <i>f</i>	10 392. <i>f</i>
2 c	3115. <i>f</i>	6232. <i>f</i>	31 175. <i>f</i>
2 d	3113. <i>f</i>	6235. <i>f</i>	31 177. <i>f</i>
3 a	1197. <i>f</i>	2397. <i>f</i>	11 997. <i>f</i>
3 b	1200. <i>f</i>	2400. <i>f</i>	12 000. <i>f</i>
3 c	5997. <i>f</i>	11997. <i>f</i>	59 997. <i>f</i>
3 d	6000. <i>f</i>	12000. <i>f</i>	60 000. <i>f</i>
4 a	1346. <i>f</i>	2688. <i>f</i>	13 420. <i>f</i>
4 b	1342. <i>f</i>	2683. <i>f</i>	13 416. <i>f</i>
4 c	9386. <i>f</i>	18778. <i>f</i>	93 910. <i>f</i>
4 d	9391. <i>f</i>	18783. <i>f</i>	93 915. <i>f</i>
12 a	2510. <i>f</i>	4522. <i>f</i>	21 830. <i>f</i>
12 b	2163. <i>f</i>	4327. <i>f</i>	21 633. <i>f</i>
12 c	49730. <i>f</i>	99490. <i>f</i>	497 533. <i>f</i>
12 d	49757. <i>f</i>	99513. <i>f</i>	497 566. <i>f</i>
12 e	15143. <i>f</i>	30287. <i>f</i>	151 433. <i>f</i>

II. Stromverzweigung bei variablem Querschnitt der Hauptleitungen.

Bei Annahme entgegengesetzt gerichteter electromotorischer Kräfte nimmt die Stromstärke in den Hauptleitungen gegen das freie Ende hin beständig ab, so dass die in diesem Theile verbrauchte Arbeit nicht an allen Stellen dieselbe ist. Es lässt sich daher a priori schliessen, dass die Annahme eines constanten Querschnittes in den Hauptleitungen nicht die günstigste Massenvertheilung für ein gegebenes System nach sich ziehen wird. Es drängt sich also sofort die Frage auf nach der Form, welche den Hauptleitungen zu geben wäre, um eine bestimmte Leitungsmasse (Kupfer) derart auszunützen, dass die nutzlos verbrauchte Arbeit ein Minimum wird. Das Gesetz, nach welchem der Querschnitt zu verlaufen hat, ist dasselbe für das Zwei- und das Dreileitersystem wie auch für jedes andere Mehrleitersystem. Es genügt somit, um es zu finden, das Zweileitersystem nach dieser Hinsicht zu prüfen und für dasselbe die vortheilhafteste Massenvertheilung zu ermitteln.

Bezeichnen $w_1, w_2, \dots w_{n-1}$ die Widerstände in den Abschnitten der beiden Hauptleitungen des Zweileitersystems, so müssen bekanntlich zwischen diesen Grössen und den Widerständen $W_1, W_2, \dots W_{n-1}$ der Neben-

leitungen nachstehende Beziehungen bestehen, wenn alle Nebenleitungen von derselben Stromstärke i durchflossen sein sollen:

$$W_{n-1} = W_n + 1 \cdot 2 W_{n-1}$$

$$W_{n-2} = W_n + 1 \cdot 2 W_{n-1} + 2 \cdot 2 W_{n-2}$$

$$W_{n-3} = W_n + 1 \cdot 2 W_{n-1} + 2 \cdot 2 W_{n-2} + 3 \cdot 2 W_{n-3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$W_1 = W_n + 1 \cdot 2 W_{n-1} + 2 \cdot 2 W_{n-2} + 3 \cdot 2 W_{n-3} + \\ + \dots + (n-2) \cdot 2 W_2 + (n-1) \cdot 2 W_1$$

Die Summe aller Widerstände der Nebenleitungen beträgt somit

$$\sum_{v=1}^{v=n} W_v = n \cdot W_n + (n-1) \cdot 1 \cdot 2 W_{n-1} + (n-2) \cdot 2 \cdot 2 W_{n-2} + \\ + (n-3) \cdot 3 \cdot 2 W_{n-3} + \dots + (n-k) \cdot k \cdot 2 w_{n-k} + \dots + \\ + 2 \cdot (n-2) \cdot 2 w_2 + 1 \cdot (n-1) \cdot 2 w_1$$

Die aufgewendete Arbeit zur Unterhaltung der Stromstärke eins in allen Lampen beträgt pro Zeiteinheit:

$$\frac{A}{i^2} = n W_n + (n-1) \cdot 1 \cdot 2 w_{n-1} + (n-2) \cdot 2 \cdot 2 w_{n-2} + \dots \\ + 2 \cdot (n-2) \cdot 2 w_2 + 1 \cdot (n-1) \cdot 2 w_1 + n^2 W_o + (n-1)^2 \cdot 2 w_1 + \\ + (n-2)^2 \cdot 2 w_2 + \dots + 2^2 \cdot 2 w_{n-2} + 1^2 \cdot 2 w_{n-1} = \\ = n W_n + n^2 \cdot W_o + \\ + 2 n [w_{n-1} + 2 w_{n-2} + 3 w_{n-3} + \dots + (n-2) \cdot w_2 + (n-1) \cdot w_1] = \\ = n W_n + n^2 \cdot W_o + 2 n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} w_k \cdot (n-k)$$

Ist die Anzahl n der Lampen genügend gross, so kann an Stelle der letzten Summe in dem Ausdruck für $\frac{A}{i^2}$ ein bestimmtes Integral gesetzt werden, so dass an Stelle eines unstetig veränderlichen ein stetig variabler

Querschnitt angenommen werden kann. Der Factor $n-k$ ist proportional der Entfernung vom freien Ende der Hauptleitung. Der Ausdruck $n W_n + n^2 \cdot W_0$ ist von den Hauptkanälen unabhängig. Um daher die Arbeit $\frac{A}{i^2}$ zu einem Minimum zu machen, hat man nur die Veränderung des Querschnittes so zu bestimmen, dass die Summe

$\sum_{k=1}^{k=n-1} w_k (n-k)$ oder das Integral $\int_{x=0}^{x=L} (L-x) \cdot w' \cdot dx$ ein Mini-

mum wird. In diesem bezeichnet L die ganze Länge einer Hauptleitung, w' den variablen Widerstand pro Längeneinheit und x die Entfernung einer beliebigen Stelle von dem Anfangspunkt der Hauptleitung. Die Bestimmung der günstigsten Materialvertheilung reducirt sich so auf die Lösung folgender Aufgabe:

Der Querschnitt q der Hauptleitung ist so als Function von x zu bestimmen, dass das Integral

$$A_1 = \int_{x=0}^{x=L} (L-x) \cdot \frac{w}{q} \cdot dx$$

ein Minimum wird, während gleichzeitig das Integral

$$M = \int_{x=0}^{x=L} q \cdot d \cdot dx,$$

welches die Masse einer Hauptleitung darstellt, einen gegebenen Werth M_1 annimmt. Es bedeutet dabei, wie im ersten Kapitel, w den specifischen Widerstand, d die Dichtigkeit des Leitungsmaterials.

Die Variationsrechnung lehrt uns, dass man zur Bestimmung von q das Integral

$$B = \int_{x=0}^{x=L} f(x, q, q') dx = \int_{x=0}^{x=L} \left[\frac{L-x}{q} \cdot w + a \cdot q \cdot d \right] \cdot dx$$

zu einem Minimum machen muss und die vorläufig willkürliche Constante a hierauf so zu bestimmen hat, dass

$$\int_{x=L}^{x=L} q \cdot d \cdot dx \text{ den Werth } M_1 \text{ erhält. Bedeutet } f \text{ eine}$$

Function von x , q und dem ersten Differentialquotienten

$q' = \frac{dq}{dx}$, so ist die Bedingung des Minimums oder Maximums für das Integral B :

$$\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial q'} \right) = 0.$$

Da in unserem Falle f nur x und q , dagegen q' nicht enthält, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

also für unser Beispiel, weil

$$\begin{aligned} f &= \frac{L-x}{q} \cdot w + a \cdot d \cdot q \\ \frac{\partial f}{\partial q} &= - \frac{L-x}{q^2} \cdot w + a \cdot d, \quad \text{auf:} \\ \frac{L-x}{q^2} \cdot w &= a \cdot d \end{aligned}$$

oder

$$q = \sqrt{\frac{w}{a \cdot d}} \cdot \sqrt{L-x}$$

d. h. der Querschnitt q muss vom Anfangspunkt gegen das freie Ende hin proportional mit der Quadratwurzel aus der Entfernung vom freien Ende der Hauptleitung abnehmen.

Die Constante a bestimmt sich folgendermassen:

$$M_1 = \int_0^L q \cdot d \cdot dx = \int_0^L d \cdot \sqrt{\frac{w}{a \cdot d}} \cdot \sqrt{L-x} \cdot dx$$

$$M_1 = \sqrt{\frac{d \cdot w}{a}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[- (L-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{d \cdot w}{a}} \cdot \sqrt{L^3}$$

Daraus folgt:

$$a = \frac{4 \cdot d \cdot w \cdot L^3}{9 \cdot M_1^2}, \quad \sqrt{\frac{w}{a \cdot d}} = \frac{3 \cdot M_1}{2 \cdot d} \cdot \frac{1}{\sqrt{L^3}}$$

Die nutzlose Arbeit wird in diesem Falle dargestellt durch

$$\frac{A_2}{i^2} = 2 \cdot n \cdot \int_0^L \frac{(L-x) \cdot w \cdot dx}{\sqrt{\frac{w}{a \cdot d}} \cdot \sqrt{L-x}} = 2 \cdot n \cdot \int_0^L \frac{2 \cdot d \cdot w \cdot L^{\frac{3}{2}}}{3 M_1} \cdot \sqrt{L-x} \cdot dx$$

$$\frac{A_2}{i^2} = \frac{8}{9} \cdot \frac{d \cdot w}{M_1} \cdot L^3 \cdot n.$$

Um zu entscheiden, ob das Integral A_1 bei der gefundenen Form von q ein Maximum oder Minimum wird, haben wir den Ausdruck

$$\delta^2 A_1 = \int_0^L \cdot \frac{\delta^2 f}{\delta q^2} \cdot (\delta q)^2 dx$$

zu untersuchen und dessen Zeichen zu ermitteln. Dasselbe wird durch den Ausdruck $\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ bestimmt. Wir erhalten ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$ negativ oder positiv ausfällt. Es ist in unserem Falle:

$$\begin{aligned} f &= \frac{L-x}{q} \cdot w + \frac{4 \cdot d^2 \cdot w \cdot L^3}{9 \cdot M_1^2} \cdot q \\ \frac{\partial f}{\partial q} &= -\frac{L-x}{q^2} \cdot w + \frac{4 \cdot d^2 \cdot w \cdot L^3}{9 \cdot M_1^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} &= \frac{L-x}{2 q^3} \cdot w, \end{aligned}$$

daher wird das Integral A_1 zu einem Minimum.

Wir berechnen nun für einige Massenvertheilungen die Ausdrücke $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ und vergleichen dieselben mit den Werthen der günstigsten Materialvertheilung.

a) Die vortheilhafteste Vertheilung der Masse verlangt, dass zwischen den Widerständen $w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n-1}$ der Hauptleitungen folgender Zusammenhang bestehe:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot w_{n-1}, \quad \dots, \\ w_{n-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w_{n-1}, \quad w_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot w_{n-1}$$

Die totale Arbeit (für die Stromstärke eins in allen Lampen) pro Zeiteinheit beträgt bei dieser Anordnung des Materials:

$$\frac{A}{i^2} = n \cdot \omega + n^2 \cdot W_0 + \\ + 2 n \cdot w_{n-1} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1})$$

Die erforderliche electromotorische Kraft nimmt den Werth an:

$$\frac{E}{i} = \omega + n \cdot W_0 + \\ + 2 w_{n-1} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1}).$$

b) Wir betrachten ferner den Fall constanter Stromdichtigkeit. Dieser tritt ein, wenn die Widerstände $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ den Bedingungen genügen:

$$w_1 = \frac{1}{n-1} \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = \frac{1}{n-2} \cdot w_{n-1}, \quad \dots, \\ w_{n-3} = \frac{1}{3} w_{n-1}, \quad w_{n-2} = \frac{1}{2} w_{n-1}.$$

Führen wir diese Beziehungen in die allgemeinen Ausdrücke für $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{A}{i^2} &= n \varpi + n^2 \cdot W_o + 2 n \cdot (n-1) \cdot \frac{w_{n-1}}{n-1} + \\ &+ 2 n (n-2) \cdot \frac{w_{n-1}}{n-2} + \dots + 2 n \cdot 2 \cdot \frac{w_{n-1}}{2} + 2 n w_{n-1} = \\ &= n \varpi + n^2 \cdot W_o + 2 \cdot n (n-1) \cdot w_{n-1} \\ \frac{E}{i} &= \varpi + n W_o + 2 (n-1) \cdot w_{n-1}\end{aligned}$$

c) Die Annahme der Widerstände $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ nach dem Gesetze

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{1}{(n-1)^2} \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = \frac{1}{(n-2)^2} \cdot w_{n-1}, \quad \dots \\ w_{n-3} &= \frac{1}{9} w_{n-1}, \quad w_{n-2} = \frac{1}{4} w_{n-1}\end{aligned}$$

liefert die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{A}{i^2} &= n \cdot \varpi + n^2 \cdot W_o + 2 n \cdot (n-1) \cdot \frac{w_{n-1}}{(n-1)^2} + \\ &+ 2 n \cdot (n-2) \cdot \frac{w_{n-1}}{(n-2)^2} + \dots + 2 n \cdot 2 \cdot \frac{w_{n-1}}{2^2} + 2 n \cdot w_{n-1} = \\ &= n \varpi + n^2 \cdot W_o + 2 n w_{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) \\ \frac{E}{i} &= \varpi + n W_o + 2 \cdot w_{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)\end{aligned}$$

d) Die Materialvertheilung nach der Annahme

$$\begin{aligned}w_1 &= (n-1) \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = (n-2) w_{n-1}, \quad \dots, \quad w_{n-3} = 3 \cdot w_{n-1}, \\ w_{n-2} &= 2 \cdot w_{n-1}\end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned}\frac{A}{i^2} &= n \varpi + n^2 \cdot W_o + 2 n [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] w_{n-1} = \\ &= n \varpi + n^2 \cdot W_o + 2 n \cdot w_{n-1} \frac{(n-1) \cdot n (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ \frac{E}{i} &= \varpi + n \cdot W_o + 2 w_{n-1} \frac{(n-1) \cdot n (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\end{aligned}$$

e) Vertheilt man das Resultat der Hauptleitungen derart, dass

$$w_1 = \frac{1}{(n-1)^k} \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = \frac{1}{(n-2)^k} \cdot w_{n-1}, \quad \dots$$

$$w_{n-3} = \frac{1}{3^k} \cdot w_{n-1}, \quad w_{n-2} = \frac{1}{2^k} \cdot w_{n-1},$$

so wird

$$\frac{A}{i^2} = n \omega + n^2 \cdot W_o +$$

$$+ 2 n w_{n-1} \left[1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{3^{k-1}} + \dots + \frac{1}{(n-1)^{k-1}} \right]$$

$$\frac{E}{i} = \omega + n W_o +$$

$$+ 2 w_{n-1} \left[1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{2}{3^{k-1}} + \dots + \frac{1}{(n-1)^{k-1}} \right]$$

f) Bei einer Massenvertheilung, in welcher

$$w_1 = (n-1)^k \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = (n-2)^k w_{n-1}, \quad \dots, \quad w_{n-3} = 3^k \cdot w_{n-1},$$

$$w_{n-2} = 2^k \cdot w_{n-1},$$

erhalten $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ die Werthe

$$\frac{A}{i^2} = n \omega + n^2 \cdot W_o +$$

$$+ 2 n \cdot w_{n-1} [1 + 2^{k+1} + 3^{k+1} + \dots + (n-1)^{k+1}]$$

$$\frac{E}{i} = \omega + n W_o + 2 w_{n-1} [1 + 2^{k+1} + 3^{k+1} + \dots + (n-1)^{k+1}]$$

Man erkennt aus diesen Resultaten leicht, dass mit grösser werdendem k bei gegebenem Widerstand w_{n-1} der Fall *e* die geringste Arbeit und electromotorische Kraft erfordert, dagegen den grössten Materialaufwand verlangt. Umgekehrt verhält es sich mit dem Falle *f*. Offenbar haben die Resultate dieser verschiedenen Annahmen nur Bedeutung für den Fall, dass die für die Hauptleitungen aufgewendete Leitungsmasse einen bestimmten Werth M hat. Wir haben desshalb an Stelle

des Widerstandes w_{n-1} die Masse M in die Ausdrücke $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ einzuführen. Die obigen Vertheilungsarten führen dann zu folgenden Relationen.

a) Zwischen den Widerständen $w_1, w_2, \dots w_{n-1}$ der beiden Hauptkanäle bestehen die Beziehungen

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{n-2}} w_{n-1}, \dots$$

$$w_{n-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} w_{n-1}, \quad w_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} w_{n-1},$$

wenn die Querschnitte $q_1, q_2, \dots q_{n-1}$ den Bedingungen genügen:

$$q_1 = \sqrt{n-1} \cdot q_{n-1}, \quad q_2 = \sqrt{n-2} \cdot q_{n-1}, \dots$$

$$q_{n-3} = \sqrt{3} \cdot q_{n-1}, \quad q_{n-2} = \sqrt{2} \cdot q_{n-1}.$$

Die ganze Masse einer Hauptleitung beträgt

$$M = d \cdot l (q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1}) =$$

$$= d \cdot l q_{n-1} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \dots + \sqrt{n-1})$$

wenn l den Lampenabstand bezeichnet. Ferner ist

$$w_{n-1} = \frac{l \cdot w}{q_{n-1}} = \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n-1})$$

Daraus folgt für $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$:

$$\frac{A}{i^2} = n \omega + n^2 \cdot W_o + 2n \cdot \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n-1})^2$$

$$\frac{E}{i} = \omega + n \cdot W_o + 2 \cdot \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n-1})^2$$

b) Damit

$$w_1 + \frac{1}{n-1} \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = \frac{1}{n-2} \cdot w_{n-2}, \dots$$

$$w_{n-3} = \frac{1}{3} w_{n-1}, \quad w_{n-2} = \frac{1}{2} w_{n-1},$$

müssen die Querschnitte $q_1, q_2, \dots q_{n-1}$ das Gesetz befolgen:

$$q_1 = (n-1) \cdot q_{n-1}, \quad q_2 = (n-2) \cdot q_{n-1}, \dots, \quad q_{n-3} = 3 \cdot q_{n-1}, \quad q_{n-2} = 2 \cdot q_{n-1}.$$

Bei dieser Massenvertheilung wird

$$M = d \cdot l \cdot q_{n-1} [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] = d \cdot l \cdot q_{n-1} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$w_{n-1} = \frac{l \cdot w}{q_{n-1}} = \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

Somit ist

$$\frac{A}{i^2} = n \omega + n^2 \cdot W_o + \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n^2 (n-1)^2$$

$$\frac{E}{i} = \omega + n W_o + \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} n \cdot (n-1)^2$$

c) Die Annahme

$$w_1 = \frac{1}{(n-1)^2} w_{n-1}, \quad w_2 = \frac{1}{(n-2)^2} \cdot w_{n-1}, \quad \dots$$

$$w_{n-3} = \frac{1}{3^2} \cdot w_{n-1}, \quad w_{n-2} = \frac{1}{2^2} \cdot w_{n-1}$$

zieht die Bedingungen

$$q_1 = (n-1)^2 \cdot q_{n-1}, \quad q_2 = (n-2)^2 \cdot q_{n-1}, \quad \dots$$

$$q_{n-3} = 3^2 \cdot q_{n-1}, \quad q_{n-2} = 2^2 \cdot q_{n-1}$$

nach sich und liefert, weil

$$M = d \cdot l \cdot q_{n-1} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] = d \cdot l \cdot q_{n-1} \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{d \cdot l}{M} \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad w_{n-1} = \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

für $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ die Ausdrücke:

$$\frac{A}{i^2} = n \omega + n^2 \cdot W_o + n \cdot \frac{2 l^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

$$\frac{E}{i} = \omega + n W_o + \frac{2 l^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

d) Die Vertheilungsweise nach dem Gesetz

$$w_1 = (n-1) w_{n-1}, \quad w_2 = (n-2) w_{n-1}, \quad \dots, \quad w_{n-3} = 3 \cdot w_{n-1},$$

$$w_{n-2} = 2 \cdot w_{n-1}$$

erfordert, dass

$$q_1 = \frac{1}{n-1} q_{n-1}, \quad q_2 = \frac{1}{n-2} q_{n-1}, \quad \dots, \quad q_{n-3} = \frac{1}{3} \cdot q_{n-1}, \quad q_{n-2} = \frac{1}{2} q_{n-1}$$

$$M = d \cdot l \cdot q_{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right),$$

$$w_{n-1} = \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right).$$

Durch Einführung dieser Werthe in die Ausdrücke $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ gehen diese über in

$$\frac{A}{i^2} = n \omega + n^2 \cdot W_o + n \cdot \frac{2l^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

$$\frac{E}{i} = \omega + n \cdot W_o + \frac{2l^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot \frac{(n-1) \cdot n(2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$$

e) Es bestehen die Gleichungen

$$w_1 = \frac{1}{(n-1)^k} \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = \frac{1}{(n-2)^k} w_{n-1}, \quad \dots \quad w_{n-3} = \frac{1}{3^k} \cdot w_{n-1}, \quad w_{n-2} = \frac{1}{2^k} w_{n-1},$$

wenn

$$q_1 = (n-1)^k \cdot q_{n-1}, \quad q_2 = (n-2)^k \cdot q_{n-1}, \quad \dots, \quad q_{n-3} = 3^k \cdot q_{n-1},$$

$$q_{n-2} = 2^k \cdot q_{n-1}$$

Dann ist

$$M = d \cdot l \cdot q_{n-1} \left[1 + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k \right]$$

$$w_{n-1} = \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} \left[1 + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k \right]$$

$$\frac{A}{i^2} = n \omega + n^2 \cdot W_o +$$

$$+ n \cdot \frac{2l^2 \cdot d \cdot w}{M} \left[1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{3^{k-1}} + \dots + \frac{1}{(n-1)^{k-1}} \right] \cdot \left[1 + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k \right]$$

$$\frac{E}{i} = \omega + n W_o +$$

$$+ \frac{2l^2 \cdot d \cdot w}{M} \left[1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{3^{k-1}} + \dots + \frac{1}{(n-1)^{k-1}} \right] \cdot \left[1 + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k \right]$$

f) Macht man

$$w_1 = (n-1)^k \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = (n-2)^k \cdot w_{n-1}, \quad \dots, \quad w_{n-3} = 3^k \cdot w_{n-1},$$

$$w_{n-2} = 2^k \cdot w_{n-1},$$

so wird

$$M = d \cdot l \cdot q_{n-1} \left[1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{(n-1)^k} \right]$$

$$w_{n-1} = \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} \left[1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{(n-1)^k} \right]$$

Die Ausdrücke $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ werden dargestellt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{A}{i^2} &= n \cdot \omega + n^2 \cdot W_o + \\ &+ n \cdot \frac{2l^2 \cdot d \cdot w}{M} \left[1 + 2^{k+1} + 3^{k+1} + \dots + (n-1)^{k+1} \right] \left[1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{(n-1)^k} \right] \\ \frac{E}{i} &= \omega + n W_o + \\ &+ \frac{2l^2 \cdot d \cdot w}{M} \left[1 + 2^{k+1} + 3^{k+1} + \dots + (n-1)^{k+1} \right] \left[1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{(n-1)^k} \right] \end{aligned}$$

g) Bei constantem Querschnitt ist

$$\begin{aligned} \frac{A}{i^2} &= n \omega + n^2 W_o + \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} n^2 \cdot (n-1)^2 \\ \frac{E}{i} &= \omega + n W_o + \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M} \cdot n (n-1)^2 \end{aligned}$$

Aus diesen verschiedenen Fällen lassen sich als allgemeine Sätze erkennen:

1. Die Massenvertheilung, nach welcher

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{n-2}} w_{n-1}, \quad \dots$$

$$w_{n-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} w_{n-1}, \quad w_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} w_{n-1},$$

$$q_1 = \sqrt{n-1} \cdot q_{n-1}, \quad q_2 = \sqrt{n-2} \cdot q_{n-1}, \quad \dots$$

$$q_{n-3} = \sqrt{3} \cdot q_{n-1}, \quad q_{n-2} = \sqrt{2} \cdot q_{n-1},$$

verlangt, wie bereits abgeleitet wurde, bei gegebenem Materialaufwand eine minimale totale Arbeit und electromotorische Kraft.

2. Der Fall constanter Stromdichtigkeit, für welchen, wie sich leicht zeigen lässt, die in den Hauptleitungen verbrauchte Arbeit ein Minimum wird, weist dieselbe totale Arbeit und dieselbe electromotorische Kraft auf wie der Fall des constanten Querschnittes. Dieses Ergebniss rührt her von den grössern Widerständen in den Nebenleitungen, die der erstere Fall erfordert. Was an Arbeit in den Hauptleitungen durch die constante Stromdichtigkeit erspart wird, geht durch die grösseren Widerstände in den Nebenleitungen verloren.

3. Die beiden Massenvertheilungen nach den Relationen

$$w_1 = \frac{1}{(n-1)^k} \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = \frac{1}{(n-2)^k} \cdot w_{n-1}, \quad \dots$$

$$w_{n-2} = \frac{1}{2^k} \cdot w_{n-1}$$

und

$$w_1 = (n-1)^{k-1} \cdot w_{n-1}, \quad w_2 = (n-2)^{k-1} \cdot w_{n-1}, \quad \dots$$

$$w_{n-1} = 2^{k-1} \cdot w_{n-1}$$

erfordern genau dieselbe totale Arbeit und electromotorische Kraft. Mit wachsendem k nehmen $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ zu. Die Vertheilungsarten $c)$ und $d)$ sind Specialfälle dieser beiden allgemeineren und ergeben aus diesem Grunde für $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ dieselben Resultate.

Um den Unterschied der besprochenen Vertheilungsmethoden an einem Beispiel zu zeigen, lassen wir für die Lampenanzahl $n = 600$ die Werthe von $\frac{A}{i^2}$ und $\frac{E}{i}$ folgen.

Vertheilungs- methode	$\frac{A}{i^2}$ (ohne $n \cdot \omega + n^2 \cdot W_o$)	$\frac{E}{i}$ (ohne $\omega + n W_o$)
a	$113\ 806 \cdot 10^6 \cdot \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M}$	$189\ 677 \cdot 10^3 \cdot \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M}$
b und g	$129\ 168 \cdot 10^6 \cdot \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M}$	$215\ 281 \cdot 10^3 \cdot \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M}$
c und d	$594\ 877 \cdot 10^6 \cdot \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M}$	$991\ 462 \cdot 10^3 \cdot \frac{l^2 \cdot d \cdot w}{M}$

Die Bestimmung des günstigsten Materialaufwandes M' für die Hauptkanäle ist in ähnlicher Weise durchzuführen wie bei constantem Querschnitt.



Flatt, Robert,

Über die Canalisation der Electrizität in der electrischen Beleuchtung

1889

Phys.sp. 47 x#Beibd.1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11881390-4